OSNOVI METODE KONAČNIH ELEMENATA
Predavanje V

Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka
Departman za građevinarstvo i geodeziju
Katedra za konstrukcije
Prof. dr Andrija Rašeta
Kabinet LG209
email: araseta@uns.ac.rs i araseta@gmail.com

OSNOVI METODE KONAČNIH ELEMENATA
Predavanje V

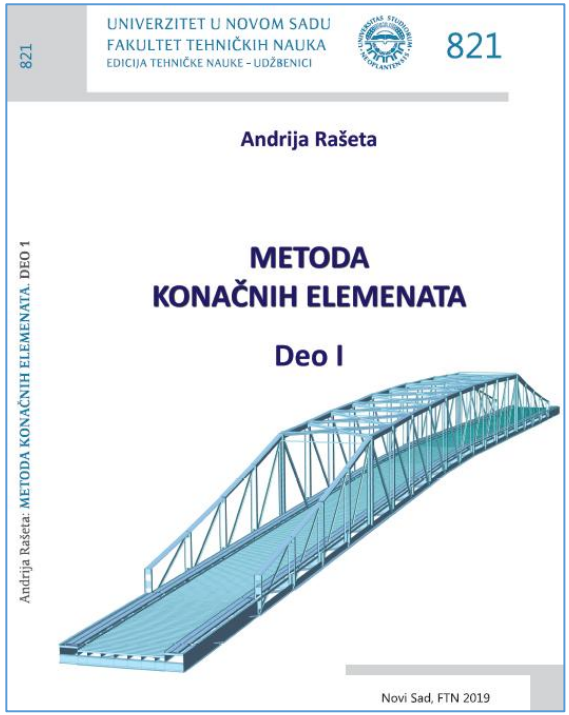
Greške u primeni MKE

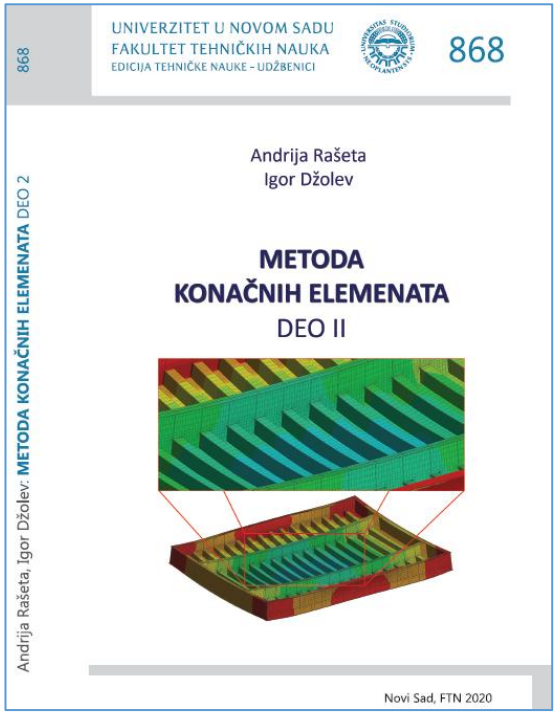
Napomene o konvergenciji rešenja i modeliranju

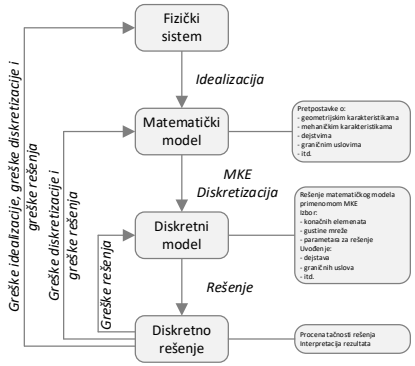
Računarska implementacija metode pomeranja

Literatura

- **Metoda konačnih elemenata, deo I**, A. Rašeta, FTN Novi Sad, 2019.
- **Metoda konačnih elemenata, deo II**, A. Rašeta, I. Džolev, FTN Novi Sad, 2020.



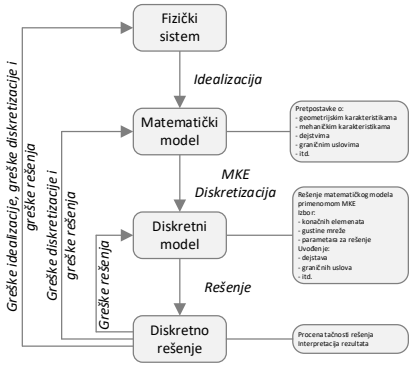




Greške u primeni MKE

- **U opštem slučaju rešenja određena primenom MKE su aproksimativna ili približna**
- **Potencijalni izvori grešaka pri simulaciji ponašanja**
  - **Greške idealizacije**
    - Matematički model se bazira na pogrešnim matematičkim formulacijama koje ne opisuju dovoljno tačno fizički sistem
    - Zanemareni su detalji koji utičn na odgovor fizičkog sistema
    - Greške aproksimacije: oblika sistema, dejstava, karakteristika materijala i graničnih uslova, kao i greške u izboru vrste analize
  - **Greške diskretizacije**
    - Razlika između rešenja diferencijalnih jednačina matematičkog modela i rešenja algebarskih jednačina diskretnog modela
    - Uzroci u izboru tipa, veličine i oblika KE
    - Numeričke greške se mogu pojaviti i zbog slabe uslovljenosti sistema jednačina (*ill-conditioning*) koja može nastati i zbog grešaka pri diskretizaciji

Greške u primeni MKE



- **Potencijalni izvori grešaka pri simulaciji ponašanja**
  - **Greške numeričkog proračuna**
    - **Greške računarskog softvera**
      - Greške kodiranja (tzv. bagovi i greške instalacije računarskog softvera)
      - Vrlo nezgodne jer ako dopuste proces proračuna dobijene netačnosti u rezultatima nisu odmah vidljive
    - **Greške računara**
      - Odsecanje ili zaokruživanje prilikom obrade realnih brojeva jer se koristi određen memorijski prostor kojim se definiše broj značajnih cifara nekog broja
      - Pri oduzimanju i sabiranju brojeva sa velikom razlikom u redu veličina, može da se izazove slabouslovljenost sistema zbog zaokruživanja
  - **Greške pri unosu podataka**
    - Može biti ručni (najveća mogućnost pojave greške), poluautomatski i automatski
  - **Greške interpretacije rezultata**
    - Uzrok može biti korisnik ili primenjeni postprocesor (nesavršenost grafičkog uređaja i/ili prikaz rešenja u pogrešnim tačkama)

Napomene o konvergenciji rešenja i modeliranju

- Ako se povećanjem broja konačnih elemenata razlika između približnog i tačnog rešenja smanjuje tada je **postupak konvergentan**, a ako se ta razlika povećava **postupak je divergentan**
- Ako se razlika između približnog i tačnog rešenja smanjuje na takav način da se tačnom rešenju prilazi sa jedne strane **konvergencija je monotona**, a u suprotnom **konvergencija je nemonotona**
- **U ispravnoj formulaciji MKE na bazi pomeranja približna rešenja za generalisana pomeranja, po apsolutnim vrednostima, manja su od tačnih vrednosti, a sa progušćenjem mreže stalno se povećavaju, odnosno konvergencija je monotona**

Napomene o konvergenciji rešenja i modeliranju

- Ako na sistem deluje statička koncentrisana sila Q_i potencijalna energija deformacije glasi

$$U = \frac{1}{2} Q_i d_i$$

- Potencijal spoljašnjih sila iznosi

$$U_{spoljašnjih\ sila} = -W = -Q_i d_i$$

- Ukupna potencijalna energija sistema glasi

$$\Pi = U - W = -\frac{1}{2} Q_i d_i = -\frac{1}{2} Q_i^2 f_{ii}$$

f_{ii} je pomeranje u pravcu d_i usled jedinične sile Q_i $\quad d_i = f_{ii} Q_i$

- Ukupna potencijalna energija sistema koja odgovara približnom rešenju po MKE

$$\Pi_{približno} = -\frac{1}{2} Q_i^2 f_{ii,približno}$$

Napomene o konvergenciji rešenja i modeliranju

- Ukupna potencijalna energija za tačno rešenje ima minimum, tj. važi da je

$$\Pi_{približno} \geq \Pi$$

- odnosno sledi

$$f_{ii,\,približno} \leq f_{ii}$$

- **Na osnovu prethodnog izraza zaključuje se da su približna rešenja za pomeranja određena primenom funkcionala potencijalne energije (metoda pomeranja) manja od tačnih ili najviše jednaka tačnom rešenju**

Napomene o konvergenciji rešenja i modeliranju

- U varijacionoj formulaciji metode konačnih elemenata u kojoj se polazi od funkcionala potencijalne energije **(metoda pomeranja) uslovi kompletnosti (potpunosti) i konformnosti (kompatibilnosti) dovoljni su za monotonu konvergenciju rešenja**
- **Kriterijum kompletnosti** kaže da je za konvergenciju rešenja neophodno da promenljiva i svi njeni izvodi koji se pojavljuju u funkcionalu, za svaki konačni element, teže tačnim vrednostima kada veličina elementa teži nuli. **Kriterijum je bitan za tačnost aproksimacije polja funkcije u pojedinim KE i u metodi pomeranja definiše se sledećim stavovima**
  - 1) raspodela pomeranja u polju konačnog elementa mora biti opisana na takav način da u sebi sadrži pomeranja kao krutog tela i da se pri takvim pomeranjima ne javljaju deformacije (**test svojstvenih vrednosti**)
  - 2) aproksimacija pomeranja u polju konačnog elementa mora da obezbedi stanje konstantne deformacije u konačnom elementu ili sistemu konačnih elemenata (***patch* test**)

Napomene o konvergenciji rešenja i modeliranju

- **Test svojstvenih vrednosti**
  - Generalisana pomeranja KE kao krutog tela moraju biti obuhvaćena interpolacionim funkcijama
  - Postojanje formi ili modova nulte unutrašnje energije kontroliše se tzv. testom svojstvenih vrednosti
  - Matrica krutosti elementa mora da ima onoliko svojstvenih vrednosti koje su jednake nuli, koliko konačni element ima stepeni slobode kao kruto telo
  - Na primer, svojstvene vrednosti matrice krutosti grednog konačnog elementa u ravni glase

$$\boldsymbol{\lambda} = \left\{0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{2EA}{L} \quad \frac{2EI_z}{L} \quad \frac{6EI_z(4+L^2)}{L^3}\right\}$$

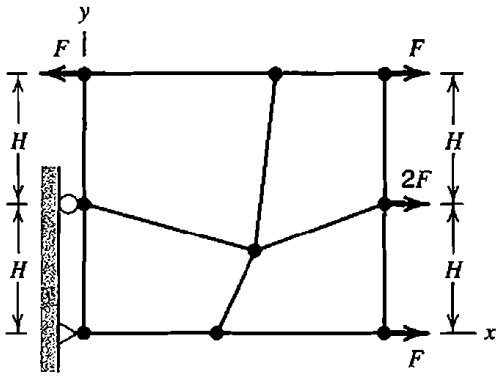
    - KE ima tri stepena slobode kao kruto telo u ravni (dve translacije i jednu rotaciju), a to odgovara nultim svojstvenim vrednostima iz prethodnog izraza

Napomene o konvergenciji rešenja i modeliranju

- ***Patch* test**
  - Uslov da se obezbedi stanje konstantne deformacije u polju KE postavlja zahtev da se za IF biraju polinomi koji omogućavaju opisivanje polja konstantnih deformacija
  - Povećanje broja KE dovodi do smanjivanja njihovih dimenzija pa se pri jako malim dimenzijama jednog elementa deformacija unutar elementa mora približiti konstantnoj vrednosti. Na taj način pri usvajanju dovoljnog broja malih elemenata, sa konstantnom deformacijom, može da se opiše proizvoljna raspodela deformacije u razmatranom domenu
  - **Mogućnost aproksimacije polja konstantne deformacije, odnosno napona, KE ili grupe KE kontroliše se tzv. patch testom. Zadaju se granični uslovi koji su potrebni da se spreče pomeranja KE ili grupe KE kao krutog tela i aplicira se opterećenje ili pomeranje čvorova za izazivanje stanja konstantne deformacije, odnosno napona**
  - **Kada se dati problem rešava više puta korišćenjem finije mreže (KE manje veličine) svaki put, konvergencija rešenja prema tačnom rešenju (pomeranja, deformacije i naponi) je zagarantovana ako KE ili grupa KE ispune *patch* test**

Napomene o konvergenciji rešenja i modeliranju

- ***Patch* test**
  - **Primer. Dvodimenzionalni izoparametarski KE sa 4 čvora**



- Problem se modelira sa KE nepravilnog oblika, tj. mreža nije pravilna ili uniformna, jer se neke greške u formulaciji KE možda neće pokazati sa regularnom mrežom i pravilnim oblikom KE
- Postoji barem jedan unutrašnji čvor ili unutrašnji KE
- Postoji tačno onoliko oslonaca koliko je potrebno da se spreči pomeranje mreže kao krutog tela
- Sistem je izložen uniformnom naponu u x pravcu. Sile *F* i 2*F* su ekvivalentno čvorno opterećenje, tj. konzistentno čvorno opterećenje
- Ako je *patch* test uspešan rešenje primenom MKE treba da ima konstantne napone $\sigma_x = 2F/Ht$ (t je konstantna debljina KE), $\sigma_y = 0$ i $\tau_{xy} = 0$ u unutrašnjem čvoru kao i u svim ostalim tačkama domena
- Prethodno opisan *patch* test je za stanje konstantnog napona σ_x. Takođe, potrebno je spovesti *patch* testove za konstantne vrednosti svakog od komponentalnih napona posebno
- Ako KE prođe sve *patch* testove možemo biti sigurni da kada koristimo MKE model sa ovim tipom KE sa sukcesivnim povećanjem *gustine* mreže rešenje problema teži sve više tačnom

Napomene o konvergenciji rešenja i modeliranju

- **Uslovi konformnosti (kompatibilnosti pomeranja) na granicama između KE bitni su za kvalitet ukupne aproksimacije u posmatranom domenu**, pa se formuliše kriterijum konformnosti koji glasi
  - Za konvergenciju rešenja potrebno je da su KE konformni, tj. da su promenljive i njihovi izvodi do $m - 1$ reda (uključujući i $m - 1$), gde je m red najvišeg izvoda u funkcionalu, kontinualni (neprekidni) na svim granicama između KE
- U zavisnosti od vrste analiziranog problema zahtevaju se različiti uslovi kontinuiteta (kompatibilnosti) na granicama između KE
- KE mogu biti kompatibilni i nekompatibilni, odnosno konformni ili nekonformni

Napomene o konvergenciji rešenja i modeliranju

- **Uslovi konformnosti (kompatibilnosti pomeranja)**
- Oznakom C^m obeležava se kontinuitet funkcije i njenih izvoda do *m*–tog reda (uključujući i *m*)
  - Kod **štapnog KE**, za diskretizaciju rešetkastih konstrukcija, neophodno je da bude zadovoljen **C^0 kontinuitet** koji podrazumeva da su vrednosti funkcije, u zajedničkom čvoru, za sve KE iste
  - **C^0 kontinuitet** je dovoljan za analizu **ravanskih problema** (**RSN** i **RSD**) i **prostornih problema** u teoriji elastičnosti
  - Kod **linijskih (grednih) KE** pojavljuju se drugi izvodi pomeranja u integralnoj formulaciji pa IF moraju da zadovolje **C^1 kontinuitet**, tj. vrednosti funkcije pomeranja i njenih prvih izvoda (obrtanja) moraju da budu kontinualne na granicama između KE
  - Pri analizi **savijanja ploča i ljuski** duž granica susednih elemenata pored kontinuiteta pomeranja zahteva se i kontinuitet obrtanja (**C^1 kontinuitet**)

Napomene o konvergenciji rešenja i modeliranju

- **S obzirom na to da se primenom konformnih KE po metodi pomeranja dobijaju generalisana pomeranja u čvorovima mreže konačnih elemenata koja su, po apsolutnim vrednostima, manja od tačnih, to znači da su konformni KE krući nego što bi trebalo da budu**
  - Ako imamo dva različita konformna KE veća tačnost može da se postigne sa KE koji ima manju krutost
  - Procena odnosa krutosti između KE
    - KE kod koga matrica krutosti ima veće svojstvene vrednosti je krući
    - KE kod koga je trag matrice krutosti veći je krući
    - KE koji ima veću vrednost korena iz zbira kvadrata svih elemenata matrice krutosti je krući

Napomene o konvergenciji rešenja i modeliranju

- **Ako se svojstvene vrednosti menjaju sa promenom položaja KE u globalnom koordinatnom sistemu onda KE ne ispunjava uslov prostorne ili geometrijske izotropije, tj. krutost zavisi od položaja KE (nije neophodno za konvergenciju ali je poželjno)**
  - preporuka je da se biraju potpuni ili kompletni polinomi, tj. polinomi koji sadrže sve koeficijente od 1 do m. Ukoliko se ne koriste potpuni polinomi poželjno je da bude zastupljena simetričnost članova u smislu da ako postoji član x_{iyk}, postoji i član x_{kyi}. Za dobru aproksimaciju funkcija u polju KE potrebno je da polinomi imaju osobinu geometrijske izotropije, tj. da u okviru elementa ostaju invarijantni u odnosu na transformaciju iz jednog koordinatnog sistema u drugi
- **Brzina konvergencije**
  - Na brzinu konvergencije utiče stepen interpolacionog polinoma tako da se sa višim stepenom interpolacije postiže brža konvergencija rešenja
  - Poželjno je da polinomi budu potpuni i da su KE prostorno izotropni

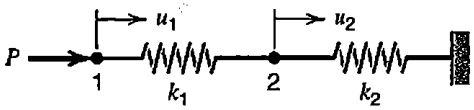
Napomene o konvergenciji rešenja i modeliranju

- **Greška rešenja**
  - Direktno je vezana za veličinu i oblik konačnog elementa
  - Smanjuje se sa smanjenjem veličine elemenata, ali se ne sme dozvoliti geometrijsko izobličenje, ili distorzija oblika
  - Treba težiti KE pravilnog oblika sa približno jednakim stranicama
  - Približavanje tačnom rešenju progušćenjem mreže naziva se ***h* – postupak**
  - Konvergencija može da se postigne i povećanjem stepena interpolacionih funkcija, tzv. ***p* – postupak**
  - Takođe, mogu se kombinovati prethodna dva postupka, tzv. ***h*/*p* – postupak**

Napomene o konvergenciji rešenja i modeliranju

- **Slaba uslovljenost sistema jednačina**

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{aligned} k_1u_1 - k_1u_2 &= P \qquad (9.2\text{-}1a) \\ -k_1u_1 + (k_1+k_2)u_2 &= 0 \qquad (9.2\text{-}1b) \end{aligned}$$



$$\det\mathbf{K} = k_1(k_1+k_2) - k_1^2$$

$$k_1 \gg k_2, \text{tj. } k_1 + k_2 \approx k_1 \Rightarrow \det\mathbf{K} = 0$$

Fizički znači da element sa krutošću k_1 nema dovoljno krut oslonac u elementu sa krutošću k_2 pa se pomera kao kruto telo

$$k_1 \ll k_2 \Rightarrow \det\mathbf{K} > 0$$

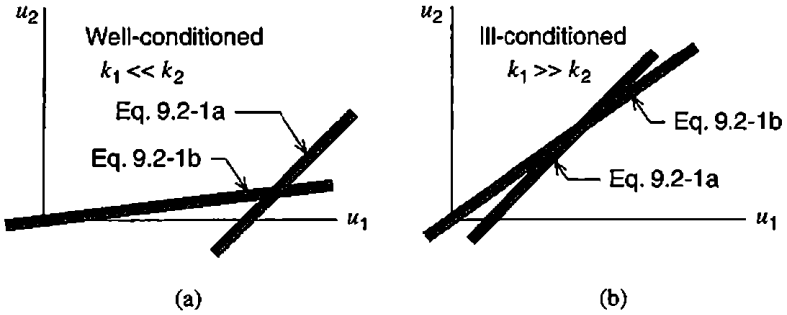
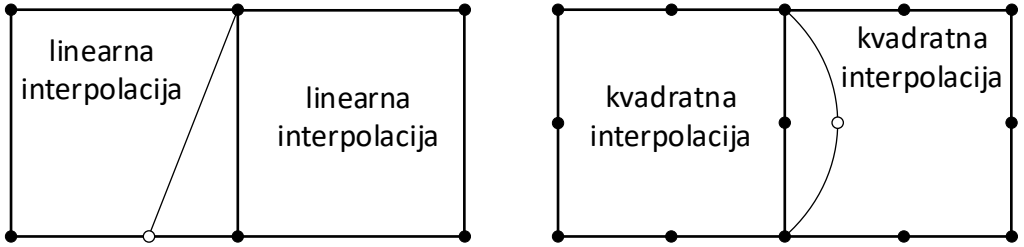


Figure 9.2-1. A two-d.o.f. structure built of linear springs. (a) Flexible part supported by stiff part. (b) Stiff part supported by flexible part.

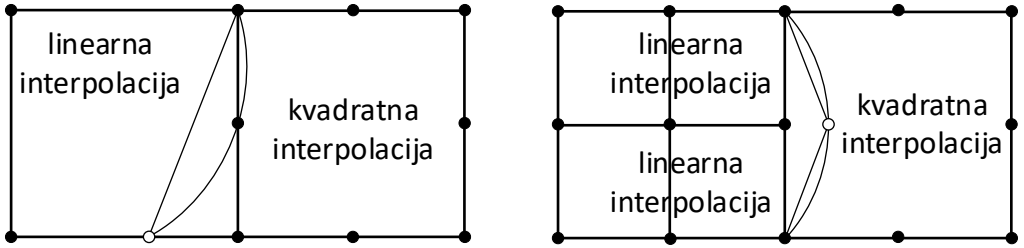
Komentar:
Slaba uslovljenost može nastati i zbog velike distorzije elemenata i zbog pojave smičućeg *locking*-a

Napomene o konvergenciji rešenja i modeliranju

- **Primena KE istog tipa, za diskretizaciju celog analiziranog domena, predstavlja najjednostavniji način za postizanje kompatibilnosti pomeranja na granicama između susednih KE**

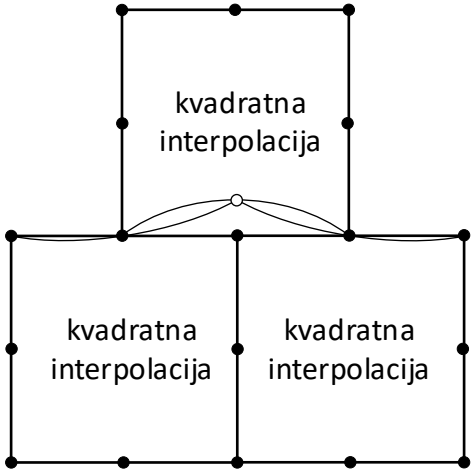


- **Zbog različitih tipova IF susednih KE kompatibilnost pomeranja nije obezbeđena**

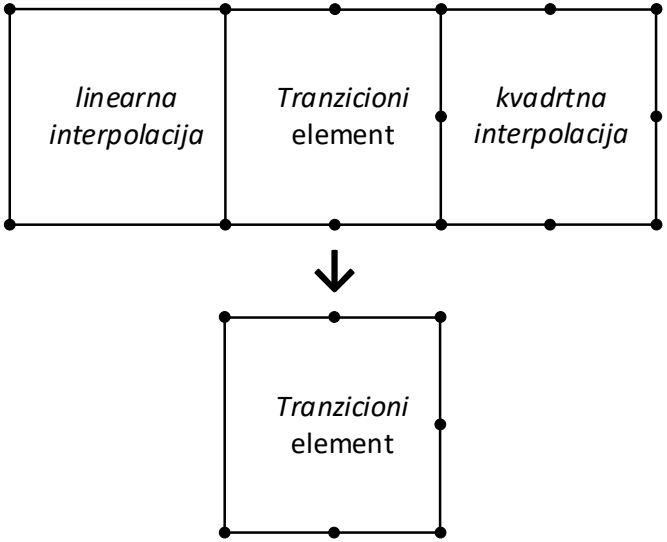


Napomene o konvergenciji rešenja i modeliranju

- **Iako su susedni KE istog tipa, tj. sa IF istog tipa, uslov kompatibilnosti pomeranja ne mora da bude ispunjen**

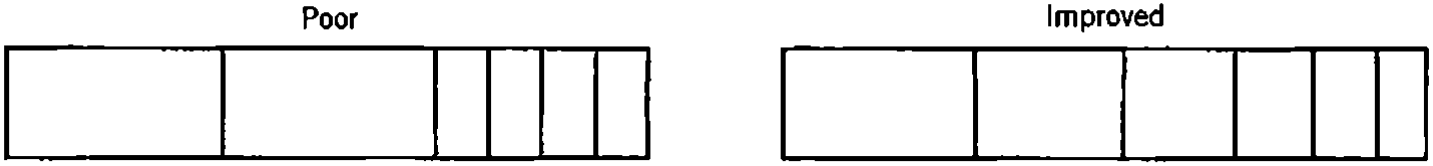


- **Da bi se obezbedila kompatibilnost pomeranja pri formiranju delova mreže na prelasku sa jednog na drugi tip KE mogu da se koriste KE sa različitim brojem čvorova duž pojedinih ivica, tzv. tranzicioni KE koji imaju različite tipove IF duž različitih ivica**

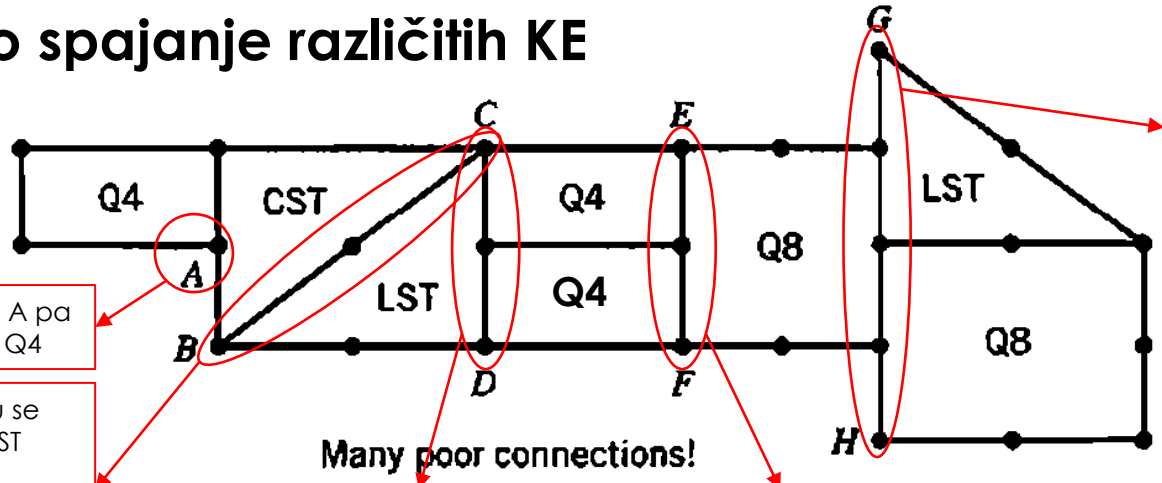


Napomene o konvergenciji rešenja i modeliranju

- **Nagla promena veličine KE**
  - Prelaz sa ređe na gušću mrežu treba da bude postupan



- **Pogrešno spajanje različitih KE**



Pri spajanju KE 2. reda treba izbegavati spajanje srednjeg čvora jednog KE sa čvorom u vrhu drugog KE

CST nema čvor u tački A pa ne može biti spojen sa Q4

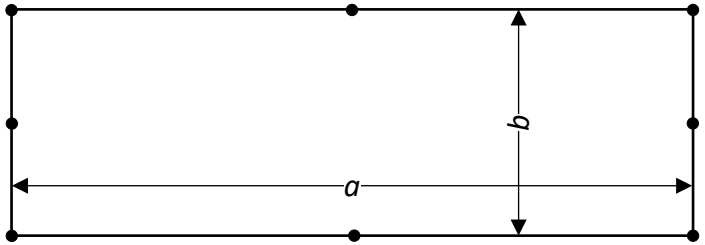
Duž ivice B-C ne mogu se spojiti CST i LST KE jer CST nema čvor duž ivice i raspodela pomeranja duž ivice je linearna za CST, a kvadratna za LST

Duž ivice C-D ne mogu se spojiti Q4 i LST KE jer je raspodela pomeranja duž ivice za Q4 linearna, a za LST kvadratna. Slično je i za ivicu E-F

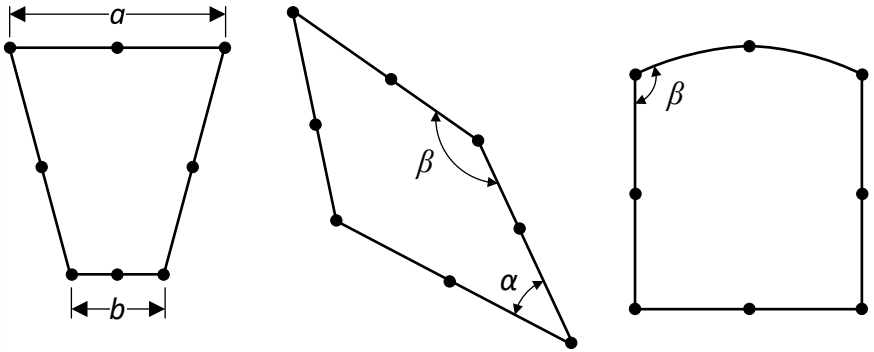
Napomene o konvergenciji rešenja i modeliranju

- **Geometrijske karakteristike KE (diskretizacija)**
  - Poželjno je da KE budu pravilnog oblika sa približno jednakim stranicama
  - U računarske softvere na bazi MKE obično su implementirani algoritmi za kontrolu kvaliteta mreže KE

Cilj je smanjiti grešku zbog nepravilne geometrije KE (**geometrijska distorzija**)



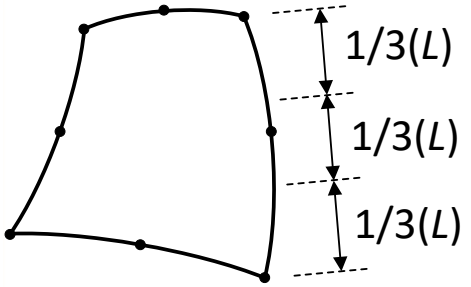
Distorzija usled neprihvatljivog odnosa dužina pojedinih ivica konačnog elementa (analiza napona $a/b \leq 3$ i analiza pomeranja $a/b \leq 10$)

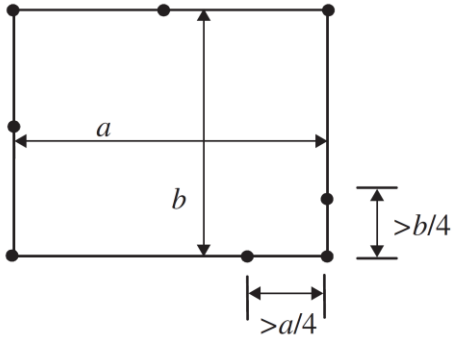


Distorzija usled neprihvatljivog odnosa dužina pojedinih ivica konačnog elementa i uglova između susednih strana ($a/b<5$, $\alpha>60°$ i $\beta<120°$)

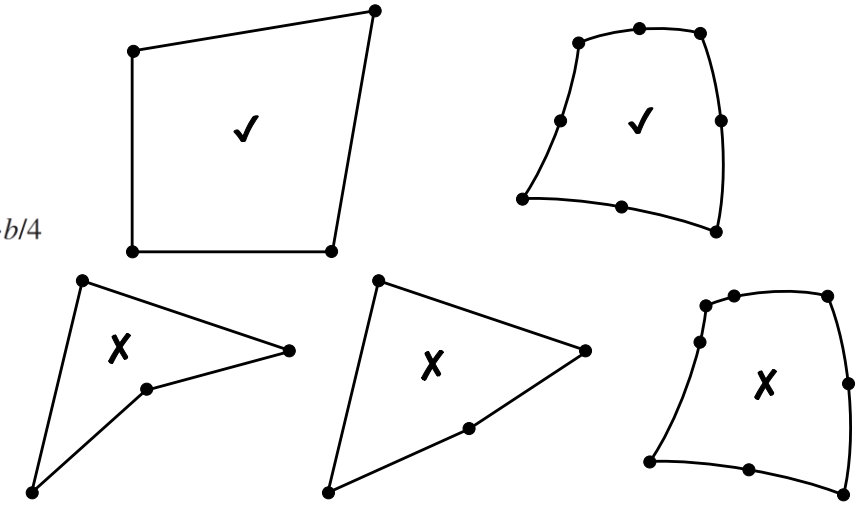
Napomene o konvergenciji rešenja i modeliranju

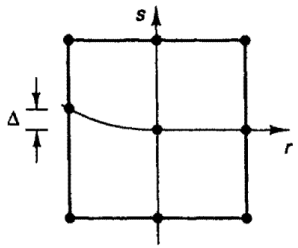
- **Geometrijske karakteristike KE (diskretizacija)**



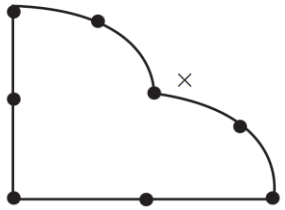


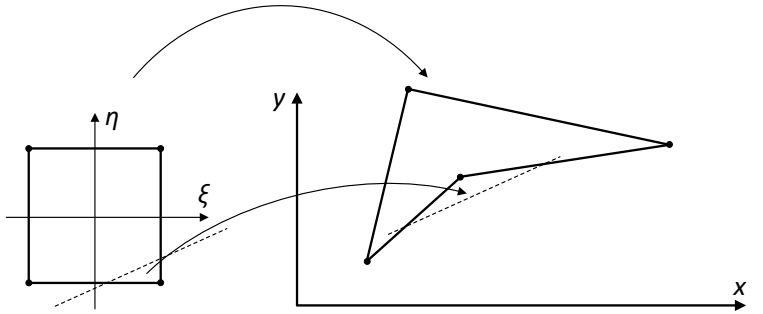
Cilj je smanjiti grešku zbog nepravilne geometrije KE (**distorzija**)





(f) Midnode distortion

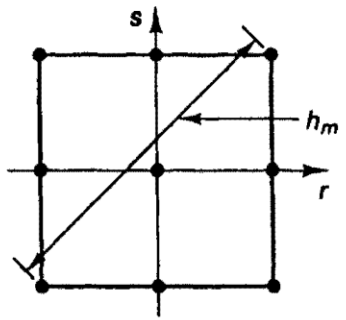




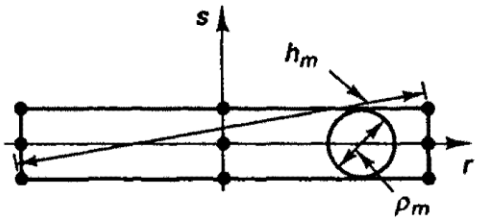
Napomene o konvergenciji rešenja i modeliranju

- **Geometrijske karakteristike KE (diskretizacija)**
  - Mera regularnosti mreže (mera dopuštene distorziranosti)

Cilj je smanjiti grešku zbog nepravilne geometrije izoparametarskih KE (**distorzija**)



(a) Undistorted configuration used in uniform meshes



(b) Aspect-ratio distortion

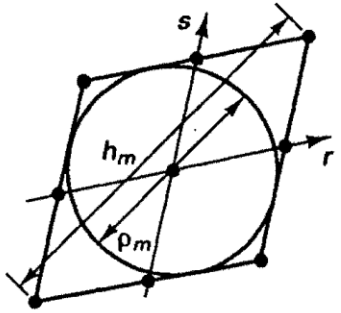
$$\sigma_m = \frac{h_m}{\rho_m} \leq \sigma_0$$

Ako je ispunjen uslov za sve KE mreža je regularna

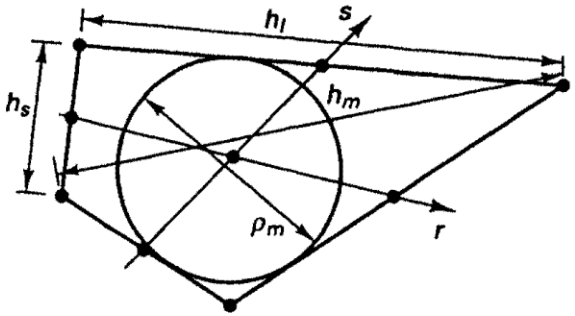
h_m – najveća dimezija

ρ_m – prečnik najveće upisane kružnice ili sfere

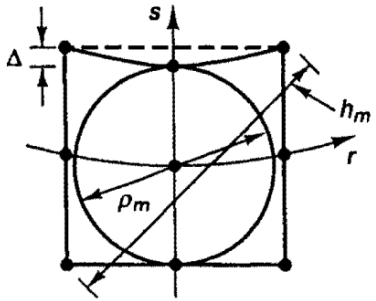
σ_0 – fiksna pozitivna vrednost



(c) Parallelogram distortion



(d) Angular distortion

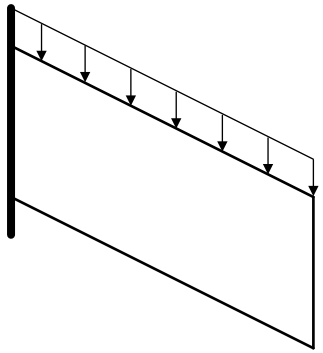


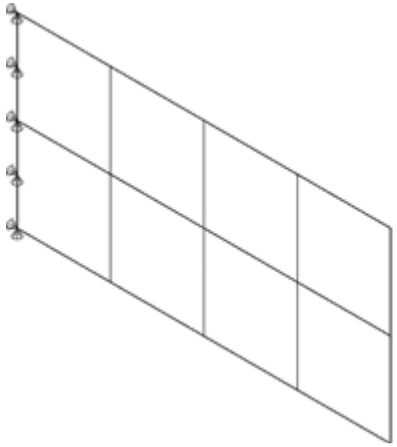
(e) Curved-edge distortion

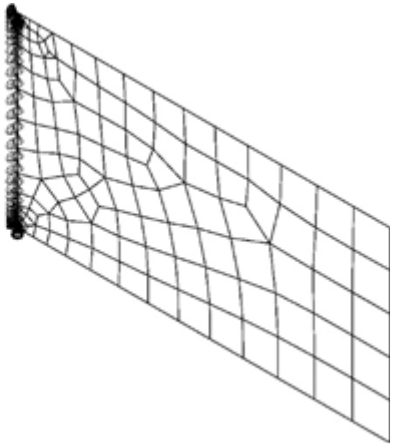
Komentar:
KE usled preterane distorzije ne može više u Dekartovom koordinatnom sistemu da opiše funkciju pomeranja istog reda kao u slučaju pravilne geometrije

Napomene o konvergenciji rešenja i modeliranju

- ***Gustina* mreže KE (diskretizacija)**
  - Potreba za mrežom veće *gustine* javlja se u zonama velikih gradijenata parametara u odnosu na ostale delove razmatranog sistema
  - Veliki gradijenti mogu da se jave u zonama: otvora, prslina, zareza, uglova, kontakta između elemenata, veza između elemenata, nagle promene krutosti i/ili materijala, koncentrisanih generalisanih spoljašnjih dejstava, oslonaca itd.

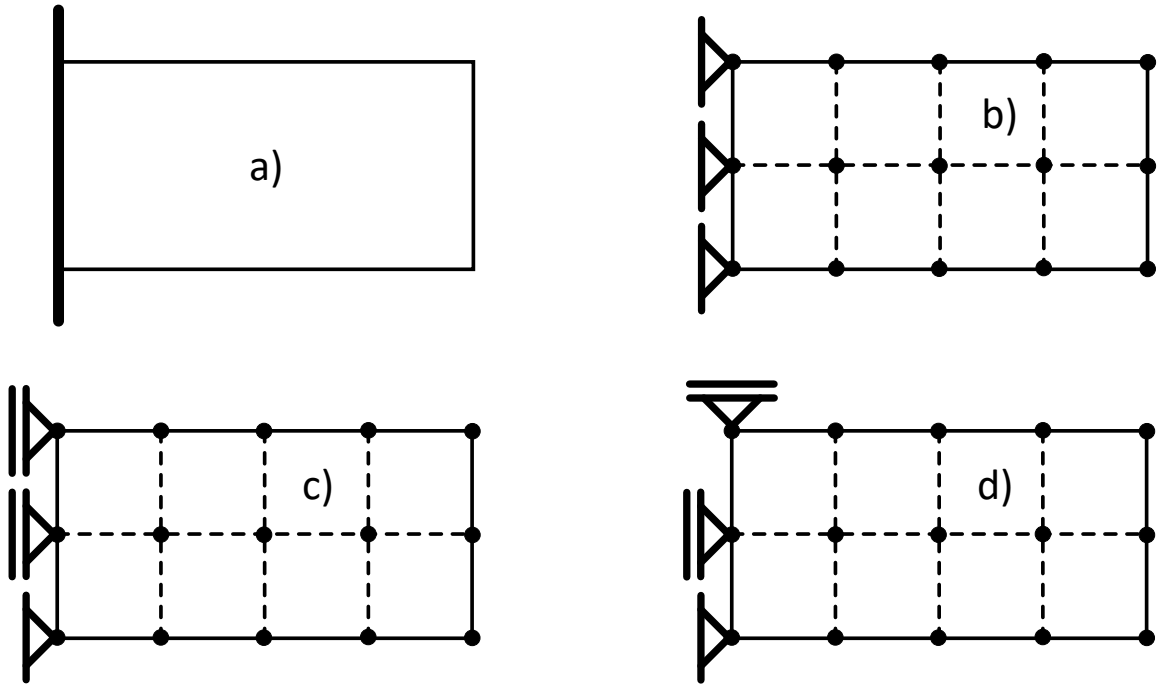






Napomene o konvergenciji rešenja i modeliranju

- **Modeliranje konturnih uslova (aproksimacija)**
  - Potrebno odabrati model koji najbliže simulirana stvarno ponašanje zida



Napomene o konvergenciji rešenja i modeliranju

- **Modeliranje ponašanja materijala (aproksimacija)**
  - Zavisi od problema koji se analizira
  - S obzirom na to da se u okviru ovog kursa obrađuje primena MKE u statičkoj analizi po teoriji prvog reda i bifurkacionoj stabilnosti linijskih nosača i ploča koristi se linearno-elastični model ponašanja materijala
- **Modeliranje dejstava (aproksimacija)**
  - Podrazumeva da se njihov realni oblik predstavi raspodeljenim i koncentrisanim generalisanim silama
  - Pri rešavanju problema primenom MKE neophodno je da se dejstva zamene ekvivalentnim generalisanim silama koje deluju u čvorovima mreže KE
  - Pri formiranju ekvivalentnog koncentrisanog opterećenja najbolji rezultati se dobijaju transformacijom u konzistentno koncentrisano opterećenje

Računarski softver

- **Implementacija metode pomeranja u programskom jeziku Python**
  - Linijski nosači (ravanski puni i rešetkasti nosači i roštilji)
- **Implementacija metode pomeranja u programu Matlab**
  - Ravanski linijski nosači (linearna statička analiza i bifurkaciona stabilnost) i 2D problemi (CST KE, izoparametarski KE sa 4. čvora, Lagranžov KE sa 9 čvorova i Serendipiti KE sa 8. čvorova)
- **O računarskim softverima...**

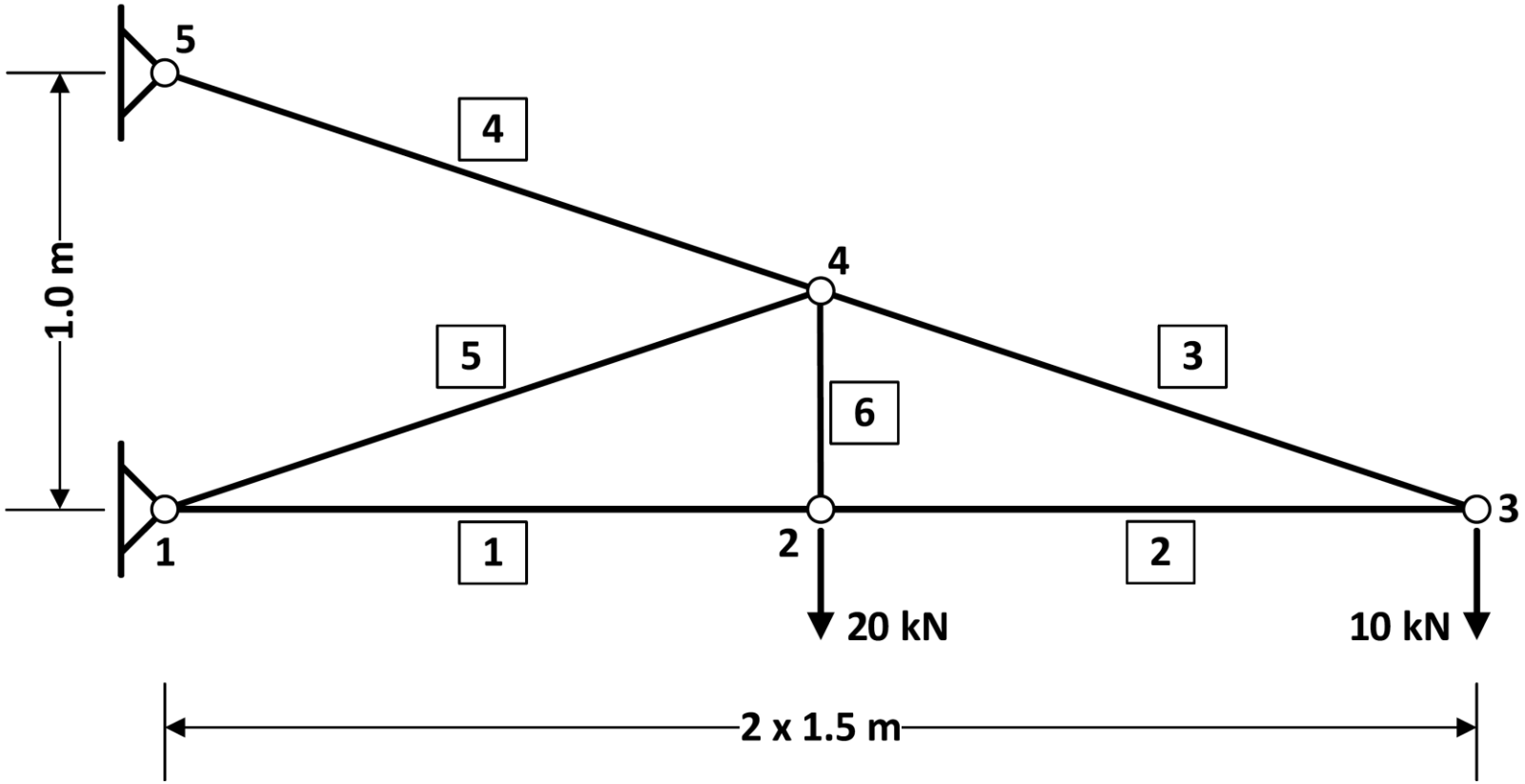
Računarski softver

Implementacija metode pomeranja u programskom jeziku Python



Python skriptovi i video uputstvo se nalaze na web sajtu http://www.tk.gradjevinans.net link *Osnovi metode konačnih elemenata*

- Primer 1. Ravanska rešetka



Svi štapovi: E = 210 GPa, A = 0.001836 m^2

Računarski softver

Implementacija metode pomeranja u programskom jeziku Python



Python skriptovi i video uputstvo se nalaze na web sajtu http://www.tk.gradjevinans.net link *Osnovi metode konačnih elemenata*

- Primer 1. Ravanska rešetka
  - Ulaz

File Edit Format Run Options Window Help

```
##########################################
#
# U OVOJ SCRIPT DATOTECI UNOSITE ULAZNE PODATKE I POKRECETE JE ZA PRORACUN
#
# ULAZNI PODACI ZA PRORACUN RAVANSKIH RESETKI
#
##########################################

try:
    from Proracun_resetka import *

    ########################################################################
    ########################################################################
    ########################################################################
    ########################################################################
    #Niz cvorova
    #br -> broj cvora
    #x -> x koordinata cvora
    #y -> y koordinata cvora
    #o_x -> oslonac u x pravcu (0 - nema, 1 - ima)
    #o_y -> oslonac u y pravcu (0 - nema, 1 - ima)
    #F_x -> sila u x pravcu
    #F_y -> sila u y pravcu
    #c_o_x -> pomeranje oslonca u X pravcu
    #c_o_y -> pomeranje oslonca u Y pravcu
    #Cvor(br, x, y, o_x, o_y, F_x, F_y, c_o_x, c_o_y)
    niz_cvorova=[Cvor.Cvor(1,0,0,1,1,0,0,0,0),
                 Cvor.Cvor(2,1.5,0,0,0,0,-20,0,0),
                 Cvor.Cvor(3,3,0,0,0,0,-10,0,0),
                 Cvor.Cvor(4,1.5,0.5,0,0,0,0,0,0),
                 Cvor.Cvor(5,0,1,1,1,0,0,0,0)]
```

Ln: 7 Col: 44

File Edit Format Run Options Window Help

```
    #Niz stapova
    ####################################
    #Vrednosti koje se prosledjuju stapu
    Em1, Em2, Em3, Em4, Em5, Em6 = 210*10**6, 210*10**6, 210*10**6, 210*10*
    #Em1, Em2, Em3 = 1, 1, 1
    Am1, Am2, Am3, Am4, Am5, Am6 = 0.001836, 0.001836, 0.001836, 0.001836,
    #Am1, Am2, Am3 = 1, 1, 1
    alfaT = 10**-5
    to = 0
    ####################################
    #br -> broj stapa
    #p_cvor -> referenca na pocetni cvor iz niza cvorova
    #k_cvor -> referenca na kranji cvor iz niza cvorova
    #E -> modul elasticnosti stapa
    #A -> povrsina poprecnog preseka stapa
    #alfaT -> koeficijent toplotnog sirenja
    #to -> temperaturna promena u osi stapa
    #Stap(br, p_cvor, k_cvor, E, A, alfaT, to)
    niz_stapova=[Stap.Stap(1, niz_cvorova[0],niz_cvorova[1], Em1, Am1, alfa
                 Stap.Stap(2, niz_cvorova[1],niz_cvorova[2], Em2, Am2, alfa
                 Stap.Stap(3, niz_cvorova[2],niz_cvorova[3], Em3, Am3, alfa
                 Stap.Stap(4, niz_cvorova[3],niz_cvorova[4], Em4, Am4, alfa
                 Stap.Stap(5, niz_cvorova[0],niz_cvorova[3], Em5, Am5, alfa
                 Stap.Stap(6, niz_cvorova[1],niz_cvorova[3], Em6, Am6, alfa

    #Crtaj nedeformisanu osu (da ili ne)
    prikazi_nedef_ose = 'da'

    #Crtaj deformisanu osu (da ili ne)
    prikazi_def_ose = 'da'
```

Ln: 7 Col: 44

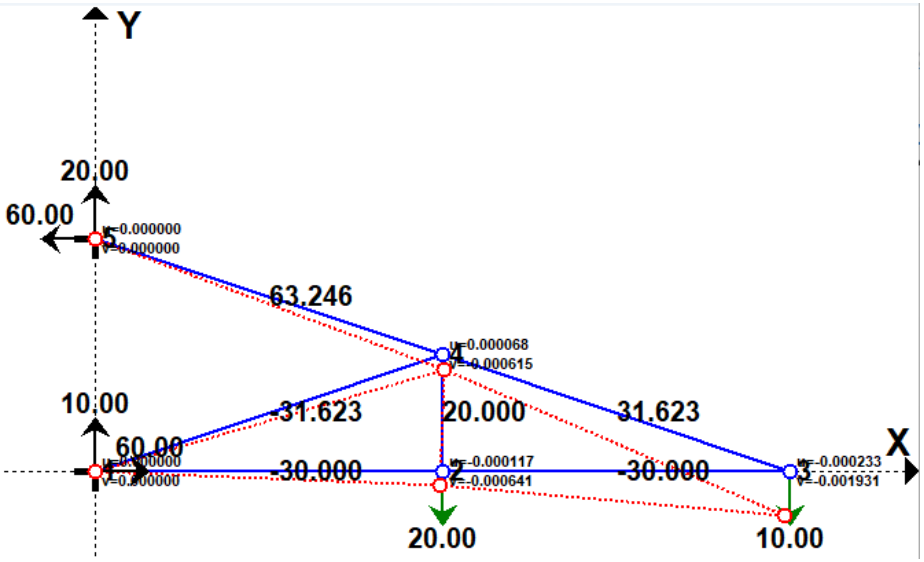
Računarski softver

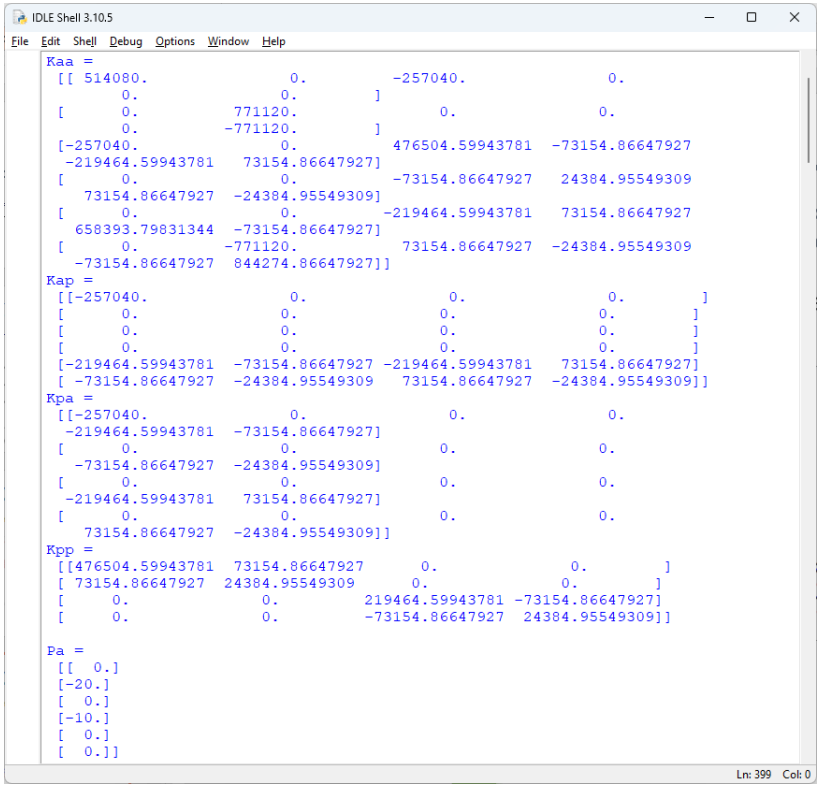
Implementacija metode pomeranja u programskom jeziku Python



Python skriptovi i video uputstvo se nalaze na web sajtu http://www.tk.gradjevinans.net link *Osnovi metode konačnih elemenata*

- Primer 1. Ravanska rešetka
  - Izlaz





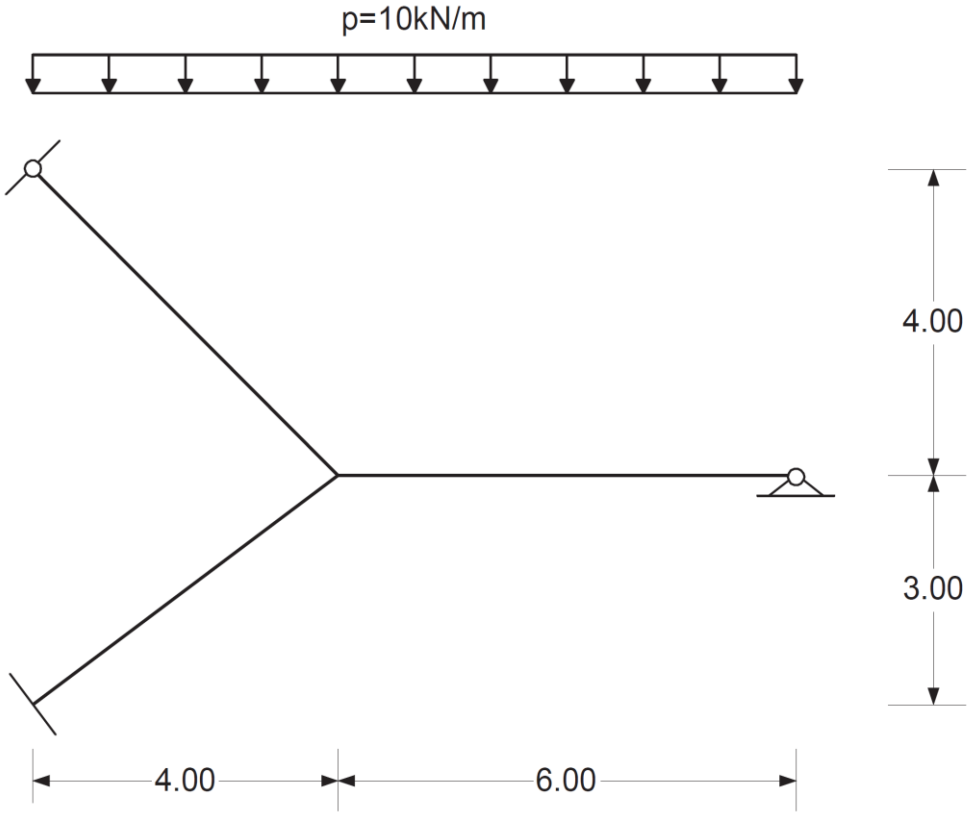
Računarski softver

Implementacija metode pomeranja u programskom jeziku Python



Python skriptovi i video uputstvo se nalaze na web sajtu http://www.tk.gradjevinans.net link *Osnovi metode konačnih elemenata*

- Primer 2. Ravanski ram



EI=const.; F/l=50·1/m^2

Računarski softver

Implementacija metode pomeranja u programskom jeziku Python



Python skriptovi i video uputstvo se nalaze na web sajtu http://www.tk.gradjevinans.net link *Osnovi metode konačnih elemenata*

- Primer 2. Ravanski ram
  - Ulaz

```
File  Edit  Format  Run  Options  Window  Help
1  ##########################################
2  #
3  # U OVOJ SCRIPT DATOTECI UNOSITE ULAZNE PODATKE I POKRECETE JE ZA PRORACUN
4  #
5  # ULAZNI PODACI ZA PRORACUN RAVANSKIH RAMOVA
6  #
7  ##########################################
8
9  try:
10     from Proracun_ram import *
11
12     ######################################################################
13     ######################################################################
14     ######################################################################
15     ######################################################################
16     #Niz cvorova
17     #br -> broj cvora
18     #x -> X koordinata cvora
19     #y -> Y koordinata cvora
20     #o_x -> oslonac u X pravcu (0 - nema, 1 - ima)
21     #o_y -> oslonac u Y pravcu (0 - nema, 1 - ima)
22     #u_z -> ukljestenje (0 - nema, 1 - ima)
23     #F_x -> cvorna sila u X pravcu
24     #F_y -> cvorna sila u Y pravcu
25     #M_z -> moment u cvoru oko Z ose
26     #c_o_x -> pomeranje oslonca u X pravcu
27     #c_o_y -> pomeranje oslonca u Y pravcu
28     #c_u_z -> obrtanje ukljestenja oko Z ose
29     #Cvor(br, x, y, o_x, o_y, u_z, F_x, F_y, M_z, c_o_x, c_o_y, c_u_z)
30     niz_cvorova=[Cvor.Cvor(1,4,3,0,0,0,0,0,0,0,0,0),
31                  Cvor.Cvor(2,10,3,1,1,0,0,0,0,0,0,0),
32                  Cvor.Cvor(3,0,7,1,1,0,0,0,0,0,0,0),
33                  Cvor.Cvor(4,0,0,1,1,1,0,0,0,0,0,0)]
                                                    Ln: 1  Col: 0
```

```
File  Edit  Format  Run  Options  Window  Help
35     #Niz stapova
36     ###################################
37     #Vrednosti koje se prosledjuju stapu
38     Em1, Em2, Em3 = 1, 1, 1
39     Am1, Am2, Am3 = 50, 50, 50
40     Im1, Im2, Im3 = 1, 1, 1
41     alfaT1, alfaT2, alfaT3 = 10**-5, 10**-5, 10**-5
42     t1, t2, t3 = 0, 0, 0
43     dt_kroz_h1, dt_kroz_h2, dt_kroz_h3 = 0, 0, 0
44     ###################################
45     #br -> broj stapa
46     #p_cvor -> referenca na pocetni cvor iz niza cvorova
47     #k_cvor -> referenca na kranji cvor iz niza cvorova
48     #E -> modul elasticnosti
49     #A -> povrsina poprecnog preseka
50     #I -> aksijalni moment inercije poprecnog preseka
51     #tip -> tip stapa ('ik', 'ig', 'gk', 'p')
52     #pn -> raspodeljeno opterecenje celom duzinom upravno na osu stapa u LKS
53     #pt -> raspodeljeno opterecenje celom duzinom u pravcu ose stapa u LKS
54     #alfaT -> koeficijent toplotnog sirenja
55     #t -> temperaturna promena u usi stapa
56     #dt_kroz_h -> temeraturni gradijent (pozitivan predznak podrazumeva da je gornja ivica preseka toplija u LKS)
57     #Stap(br, p_cvor, k_cvor, E, A, I, tip, pn, pt, alfaT, t, dt_kroz_h)
58     niz_stapova=[Stap.Stap(1, niz_cvorova[0], niz_cvorova[1], Em1, Am1, Im1, 'ig', -10, 0, alfaT1, t1, dt_kroz_h1),
59                  Stap.Stap(2, niz_cvorova[3], niz_cvorova[0], Em2, Am2, Im2, 'ik', 0, 0, alfaT2, t2, dt_kroz_h2),
60                  Stap.Stap(3, niz_cvorova[0], niz_cvorova[2], Em3, Am3, Im3, 'ig', 5, -5, alfaT3, t3, dt_kroz_h3)]
61
62     #Niz linkova
63     #br -> broj linka
64     #p_cvor -> referenca na prvi_cvor linka
65     #k_cvor -> referenca na drugi_cvor linka
66     #c_x_veza -> izjednacavanje translacije u x pravcu (da ili ne)
67     #c_y_veza -> izjednacavanje translacije u y pravcu (da ili ne)
68     #c_z_veza -> izjednacavanje rotacije oko z ose (da ili ne)
69     #Izjednacava generalisana pomeranja drugog cvora sa generalisanim pomeranjima prvog cvora
70     #Link(br, prvi_cvor, drugi_cvor, c_x_veza, c_y_veza, c_z_veza)
71     #AKO NE UVODITE LINKOVE podesite promenljivu uvedi_linkove na vrednost 'ne'
72     #a red sa definisanjem niza niz_linkova komentarisite sa #
73     uvedi_linkove = 'ne'
74     #niz_linkova=[Link.Link(1, niz_cvorova[0], niz_cvorova[1], 'ne', 'ne', 'ne')]
                                                    Ln: 1  Col: 0
```

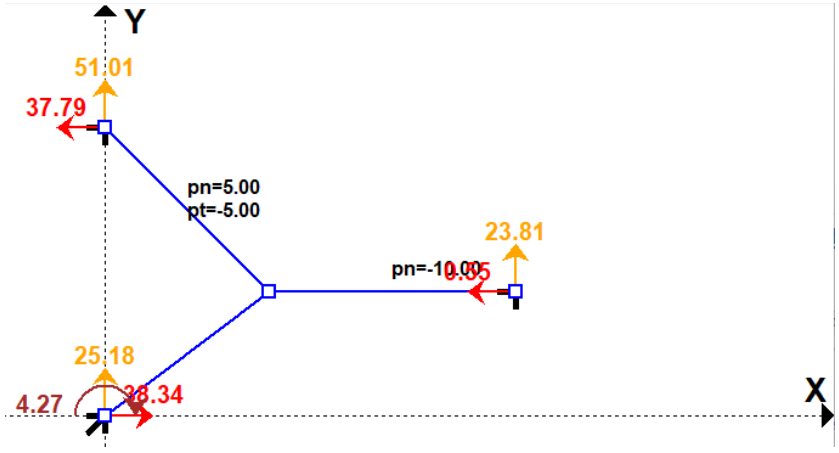
Računarski softver

Implementacija metode pomeranja u programskom jeziku Python



Python skriptovi i video uputstvo se nalaze na web sajtu http://www.tk.gradjevinans.net link *Osnovi metode konačnih elemenata*

- Primer 2. Ravanski ram
  - Izlaz



IDLE Shell 3.10.5

File Edit Shell Debug Options Window Help

```
Kaa =
 [[19.19559712  0.34278903  0.07770874]
 [ 0.34278903  8.10303268 -0.17495793]
 [ 0.07770874 -0.17495793  1.83033009]]
Kap =
 [[-8.33333333  0.         -4.42770379  4.41113097 -6.43456    -4.75392
   0.144     ]
 [ 0.         -0.01388889  4.41113097 -4.42770379 -4.75392    -3.66144
  -0.192     ]
 [ 0.         -0.08333333  0.06629126  0.06629126 -0.144       0.192
   0.4       ]]
Kpa =
 [[-8.33333333  0.          0.        ]
 [ 0.         -0.01388889 -0.08333333]
 [-4.42770379  4.41113097  0.06629126]
 [ 4.41113097 -4.42770379  0.06629126]
 [-6.43456    -4.75392    -0.144     ]
 [-4.75392    -3.66144     0.192     ]
 [ 0.144      -0.192       0.4       ]]
Kpp =
 [[ 8.33333333  0.          0.          0.          0.          0.
   0.        ]
 [ 0.          0.01388889  0.          0.          0.          0.
   0.        ]
 [ 0.          0.          4.42770379 -4.41113097  0.          0.
   0.        ]
 [ 0.          0.         -4.41113097  4.42770379  0.          0.
   0.        ]
 [ 0.          0.          0.          0.          6.43456     4.75392
  -0.144     ]
 [ 0.          0.          0.          0.          4.75392     3.66144
   0.192     ]
 [ 0.          0.          0.          0.         -0.144       0.192
   0.8       ]]

Pa =
 [[0.]
 [0.]
 [0.]]
```

Ln: 373 Col: 0

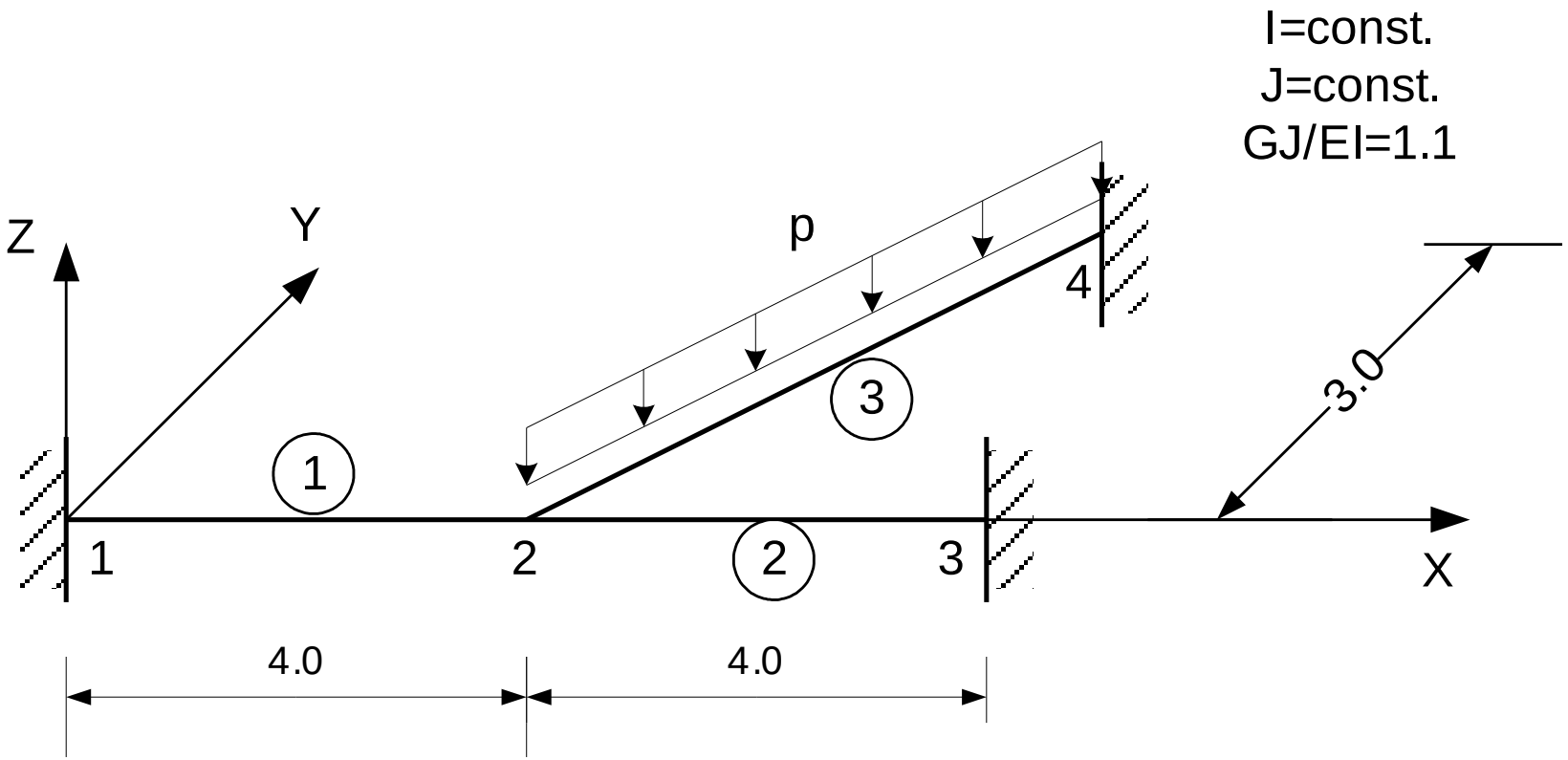
Računarski softver

Implementacija metode pomeranja u programskom jeziku Python



Python skriptovi i video uputstvo se nalaze na web sajtu http://www.tk.gradjevinans.net link *Osnovi metode konačnih elemenata*

- Primer 3. Roštilj



Računarski softver

Implementacija metode pomeranja u programskom jeziku Python



Python skriptovi i video uputstvo se nalaze na web sajtu http://www.tk.gradjevinans.net link *Osnovi metode konačnih elemenata*

- Primer 3. Roštilj
  - Ulaz

File Edit Format Run Options Window Help

```
##########################################
#
# U OVOJ SCRIPT DATOTECI UNOSITE ULAZNE PODATKE I POKRECETE JE ZA PRORACUN
#
# ULAZNI PODACI ZA PRORACUN ROSTILJA
#
##########################################

try:
    from Proracun_rostilj import *

    ######################################################################
    ######################################################################
    ######################################################################
    ######################################################################
    ###################################
    #NIZ CVOROVA
    #br -> broj cvora
    #x -> x koordinata cvora u GKS
    #y -> y koordinata cvora u GKS
    #fi_x -> ukljestenje oko x ose (0 - nema, 1 - ima)
    #o_z -> oslonac u z pravcu (0 - nema, 1 - ima)
    #fi_y -> ukljestenje oko y ose (0 - nema, 1 - ima)
    #M_x -> moment u cvoru oko x ose u GKS
    #F_z -> sila u cvoru u pravcu z ose u GKS
    #M_y -> moment u cvoru oko y ose u GKS
    #c_fi_x -> obrtanje ukljestenja oko X ose u GKS
    #c_o_z -> pomeranje oslonca u Z pravcu u GKS
    #c_fi_y -> obrtanje ukljestenja oko Y ose u GKS
    #Cvor(br, x, y, fi_x, o_z, fi_y, M_x, F_z, M_y, c_fi_x, c_o_z, c_fi_y)
    niz_cvorova=[Cvor.Cvor(1,0,0,1,1,1,0,0,0,0,0,0),
                 Cvor.Cvor(2,4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0),
                 Cvor.Cvor(3,8,0,1,1,1,0,0,0,0,0,0),
                 Cvor.Cvor(4,8,3,1,1,1,0,0,0,0,0,0)]
    ###################################
```

Ln: 1 Col: 0

File Edit Format Run Options Window Help

```
    #NIZ STAPOVA
    #Vrednosti koje se prosledjuju stapu
    Em = 1
    #ni = 0.2
    #Gm = Em/(2*(1+ni))
    Gm = 1.1
    Im = 1
    Jm = 1
    #br -> broj stapa
    #p_cvor -> referenca na pocetni cvor iz niza cvorova
    #k_cvor -> referenca na kranji cvor iz niza cvorova
    #E -> modul elasticnosti
    #G -> modul klizanja
    #I -> aksijalni moment inercije poprecnog preseka
    #J -> torziona konstanta poprecnog preseka
    #tip -> tip stapa ('ik', 'ig', 'gk')
    #pn -> raspodeljeno opterecenje celom duzinom upravno na osu stapa u LKS
    #Stap(br, p_cvor, k_cvor, E, G, I, J, tip, pn)
    niz_stapova=[Stap.Stap(1, niz_cvorova[0], niz_cvorova[1], Em, Gm, Im, Jm, 'ik', 0),
                 Stap.Stap(2, niz_cvorova[1], niz_cvorova[2], Em, Gm, Im, Jm, 'ik', 0),
                 Stap.Stap(3, niz_cvorova[1], niz_cvorova[3], Em, Gm, Im, Jm, 'ik', -1)]
    ###################################

    ###################################
    #NIZ LINKOVA
    #br -> broj linka
    #p_cvor -> referenca na prvi_cvor linka
    #k_cvor -> referenca na drugi_cvor linka
    #c_x_veza -> izjednacavanje translacije u x pravcu (da ili ne)
    #c_y_veza -> izjednacavanje translacije u y pravcu (da ili ne)
    #c_z_veza -> izjednacavanje rotacije oko z ose (da ili ne)
    #Izjednacava generalisana pomeranja drugog cvora sa generalisanim pomeranjima prvog cvora
    #Link(br, prvi_cvor, drugi_cvor, c_x_veza, c_y_veza, c_z_veza)
    #AKO NE UVODITE LINKOVE podesite promenljivu uvedi_linkove na vrednost 'ne'
    #a red sa definisanjem niza niz_linkova komentarisite sa #
    uvedi_linkove = 'ne'
    #niz_linkova=[Link.Link(1, niz_cvorova[1], niz_cvorova[4], 'da', 'da', 'da')]
    ###################################
```

Ln: 1 Col: 0

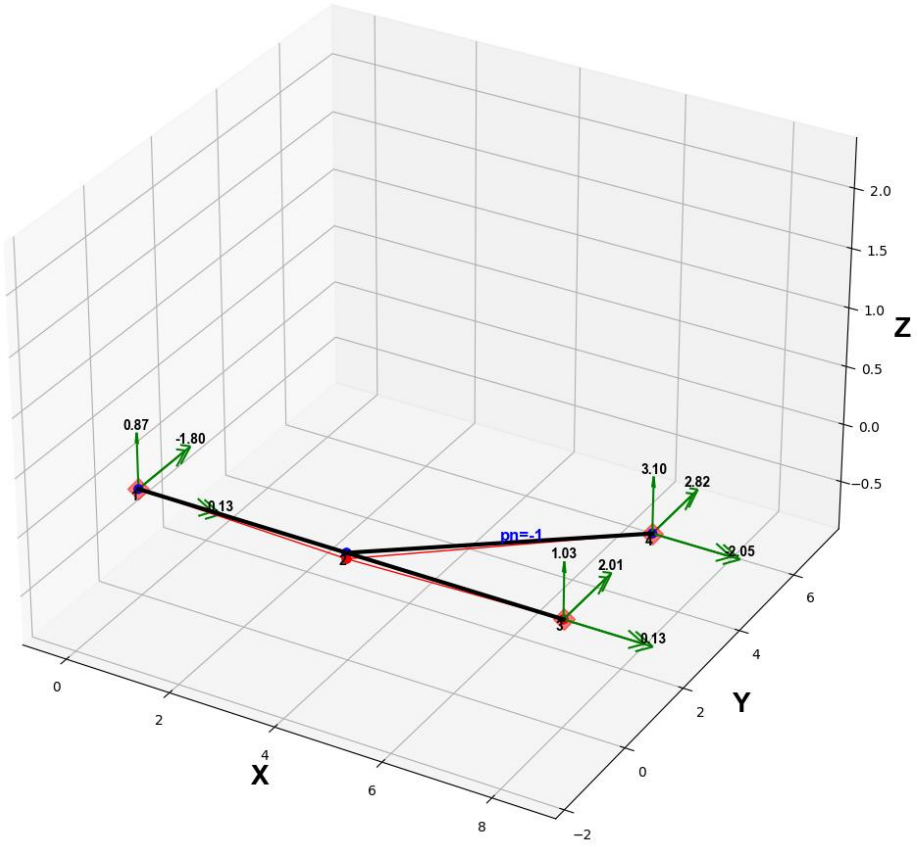
Računarski softver

Implementacija metode pomeranja u programskom jeziku Python



Python skriptovi i video uputstvo se nalaze na web sajtu http://www.tk.gradjevinans.net link *Osnovi metode konačnih elemenata*

- Primer 3. Roštilj
  - Izlaz



IDLE Shell 3.10.5

File Edit Shell Debug Options Window Help

```
Kaa =
 [[ 0.9788  0.144  -0.2784]
 [ 0.144   0.471  -0.192 ]
 [-0.2784 -0.192   2.5912]]
Kpa =
 [[-0.275   0.      0.    ]
 [ 0.     -0.1875 -0.375 ]
 [ 0.      0.375   0.5   ]
 [-0.275   0.      0.    ]
 [ 0.     -0.1875  0.375 ]
 [ 0.     -0.375   0.5   ]
 [ 0.0032  0.144  -0.2976]
 [-0.144  -0.096   0.192 ]
 [-0.2976 -0.192   0.1768]]
Kpp =
 [[ 0.275   0.      0.      0.      0.      0.      0.      0.      0.    ]
 [ 0.      0.1875 -0.375   0.      0.      0.      0.      0.      0.    ]
 [ 0.     -0.375   1.      0.      0.      0.      0.      0.      0.    ]
 [ 0.      0.      0.      0.275   0.      0.      0.      0.      0.    ]
 [ 0.      0.      0.      0.      0.1875  0.375   0.      0.      0.    ]
 [ 0.      0.      0.      0.      0.375   1.      0.      0.      0.    ]
 [ 0.      0.      0.      0.      0.      0.      0.4288 -0.144  -0.2784]
 [ 0.      0.      0.      0.      0.      0.     -0.144   0.096   0.192 ]
 [ 0.      0.      0.      0.      0.      0.     -0.2784  0.192   0.5912]]

Pa =
 [[0.]
 [0.]
 [0.]]

Qa =
 [[-1.25      ]
 [-2.5       ]
 [ 1.66666667]]

Sa = Pa + Qa=
 [[-1.25      ]
 [-2.5       ]
 [ 1.66666667]]
```

Ln: 383 Col: 0



Računarski softver

Implementacija metode pomeranja u programu Matlab

- Skript datoteke se nalaze se nalaze na web sajtu http://www.tk.gradjevinans.net link *Osnovi metode konačnih elemenata* podnaslov *Matlab*
- Rešeni primeri
  - Zadatak_1.m (Knjiga MKE deo I; 8.2.3. Ravanski okvir)
  - Zadatak_2. m (Knjiga MKE deo I; 9.3.1.3. Ravanski okvir)
  - Zadatak_3. m (Knjiga MKE deo II; 5.4. Primer 2. Rešenje primenom CST KE)
  - Zadatak_4a. m (Knjiga MKE deo II; 5.4. Primer 2. Rešenje primenom 2D izoparametarskog KE sa 4. čvora)
  - Zadatak_4b. m (Knjiga MKE deo II; 5.4. Primer 2. Rešenje primenom 2D izoparametarskog Lagranzovog KE sa 9. čvorova)
  - Zadatak_4c. m (Knjiga MKE deo II; 5.4. Primer 2. Rešenje primenom 2D izoparametarskog Serendipiti KE sa 8. čvorova)

Računarski softver



- **Napomene**
  - Računarski softver zasnovan na MKE, na prvi pogled, može da koristi svako ko dovoljno dobro nauči korisnički interfejs bez razmatranja teorije koja opisuje fizičko ponašanje razmatranog problema, ali kod takvog korisnika nameću se razna pitanja:
    - koji tip konačnog elementa treba da se koristi i koja gustina mreže, da li je ponašanje razmatranog fizičkog problema dominantno linearno ili nelinearno, statičko ili dinamičko, kolika je tačnost i kvalitet rezultata, itd.
  - Pri ovakvom pristupu računarski softver se shvata kao crna kutija u kojoj je skrivena teorija koja se najčešće smatra nepotrebnom, a ovo može da dovede do pogrešne procene ponašanja sistema
  - Za uspešnu primenu računarskog softvera zasnovanog na MKE, neophodno je, razumevanje fizičkog problema i teorije koja ga opisuje, kao i razumevanje same MKE
  - ...