OSNOVI METODE KONAČNIH ELEMENATA
Predavanje VIII

Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka
Departman za građevinarstvo i geodeziju
Katedra za konstrukcije
Prof. dr Andrija Rašeta
kabinet LG209
email: araseta@uns.ac.rs i araseta@gmail.com

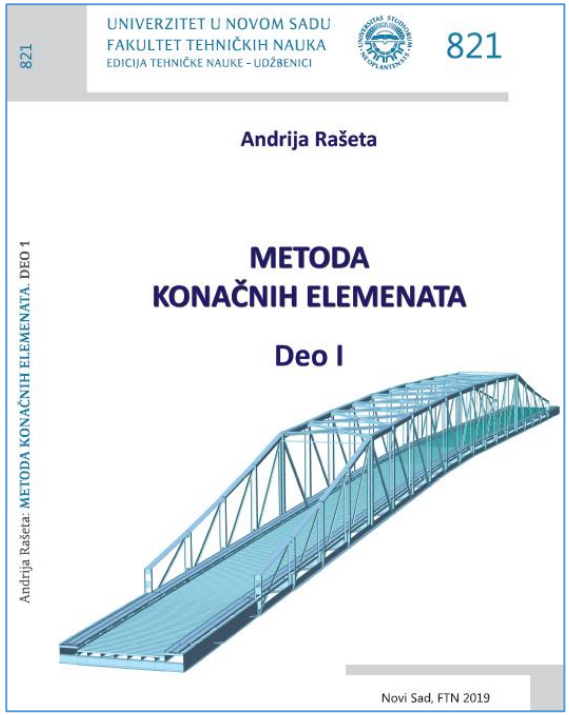
OSNOVI METODE KONAČNIH ELEMENATA
Predavanje VIII

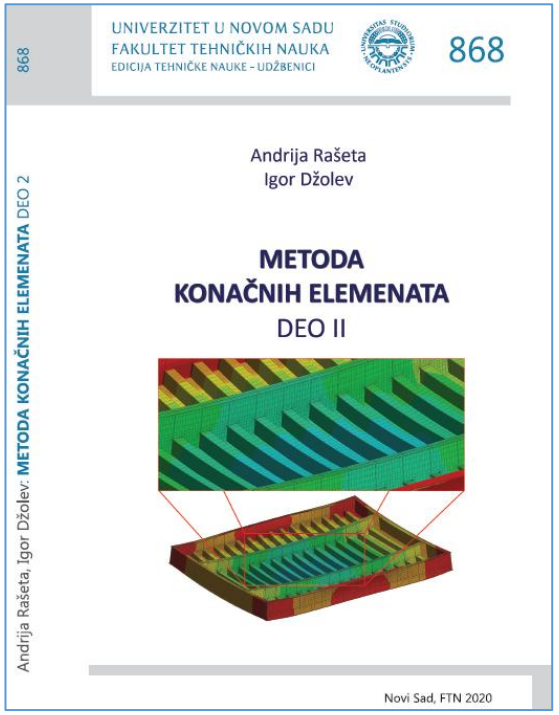
Fleksiono izvijanje linijskih nosača

Stabilnost tankih ploča

Literatura

- **Metoda konačnih elemenata, deo I**, A. Rašeta, FTN Novi Sad, 2019.
- **Metoda konačnih elemenata, deo II**, A. Rašeta, I. Džolev, FTN Novi Sad, 2020.



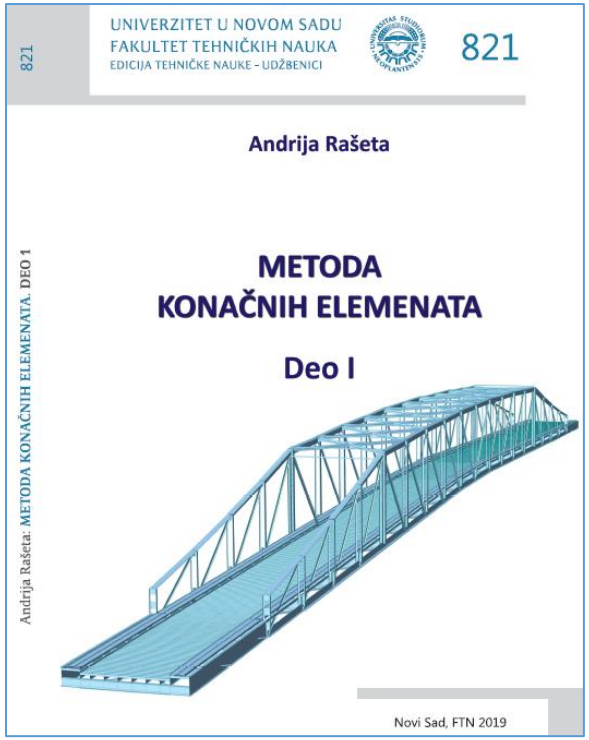


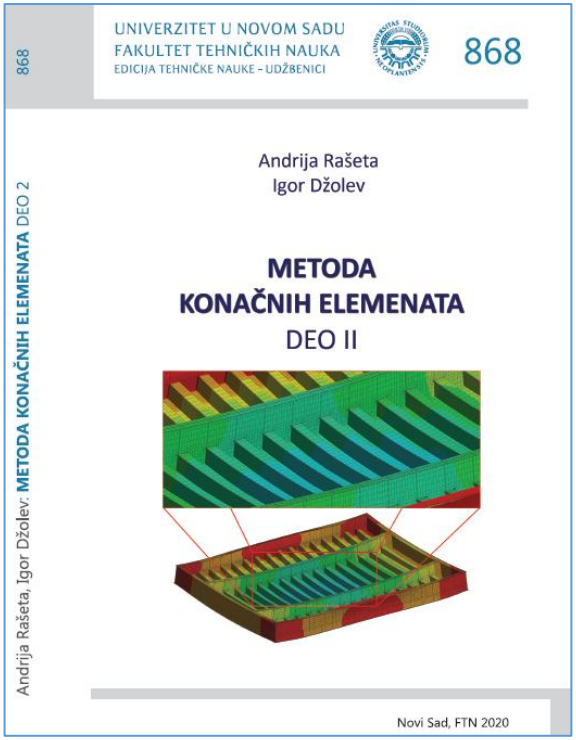
Bifurkaciona stabilnost linijskih nosača

Fleksiono izvijanje

Literatura

- **Metoda konačnih elemenata, deo I**, A. Rašeta, 2019., FTN Novi Sad, http://www.mke.gradjevinans.net
- **Metoda konačnih elemenata, deo II**, A. Rašeta, I. Džolev, FTN Novi Sad, 2020. http://www.mke.gradjevinans.net





Bifurkaciona stabilnost. Matrica krutosti linijskog KE

- Komponenta tenzora deformacije, dilatacija u pravcu ose štapa, u okviru nelinearne teorije elastičnosti glasi

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

- Dilatacija vlakna koje leži u osi štapa, u pravcu ose štapa

$$\varepsilon_x^o = \varepsilon_o = \frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_o}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_o}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_o}{\partial x}\right)^2\right]$$

- Izraz za dilataciju proizvoljnog vlakna u pravcu ose štapa u ravni $x - y$, pri čemu je uobičajeno da se u okviru tehničke teorije savijanja član $\left(\frac{du_o}{dx}\right)^2$ zanemaruje, glasi

$$\varepsilon_x = \varepsilon_o - y\kappa_z = \frac{du_o}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv_o}{dx}\right)^2 - y\frac{d^2v_o}{dx^2}$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$$

$$\kappa_z = \frac{d^2v}{dx^2}$$

Bifurkaciona stabilnost. Matrica krutosti linijskog KE

- **Potencijalna energija deformacije linijskog KE izloženog aksijalnom naprezanju i savijanju u x – *y* ravni određuje se na sledeći način**

$$U = \frac{1}{2}\int_L (EA\varepsilon^2 + EI_z\kappa_z^2)dx$$

Kao viši stepen male veličine može da se zanemari u odnosu na ostale članove

$$U = \frac{1}{2}\int_L \left[EA\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \overbrace{EA\left(\frac{du}{dx}\right)}^{S}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{1}{4}EA\left(\frac{dv}{dx}\right)^4 + EI_z\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2\right]dx$$

$$U = \frac{1}{2}\int_L \left[EA\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + EI_z\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 + S\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]dx$$

$$U_{aks} = \frac{1}{2}\int_L \left[EA\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right]dx \qquad U_{sav} = \frac{1}{2}\int_L \left[EI_z\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 + S\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]dx$$

Bifurkaciona stabilnost. Matrica krutosti linijskog KE

- **Raspodela pomeranja u pravcu ose i upravno na osu, u polju KE, u zavisnosti od generalisanih pomeranja u čvorovima može da se prikaže u obliku**

$$u(x) = \mathbf{N}_{aks}\mathbf{d}_{aks} \qquad v(x) = \mathbf{N}_{sav}\mathbf{d}_{sav}$$

- Sada sledi

$$U_{aks} = \frac{1}{2}\mathbf{d}_{aks}^T\mathbf{k}_{aks}\mathbf{d}_{aks} \qquad \mathbf{k}_{aks} = \int_L \left(EA\frac{d\mathbf{N}_{aks}^T}{dx}\frac{d\mathbf{N}_{aks}}{dx}\right)dx$$

$$U_{sav} = \frac{1}{2}\mathbf{d}_{sav}^T\mathbf{k}_{sav}\mathbf{d}_{sav} \qquad \mathbf{k}_{sav} = \int_L \left(\frac{d^2\mathbf{N}_{sav}^T}{dx^2}EI_z\frac{d^2\mathbf{N}_{sav}}{dx^2}\right)dx + S\int_L \left(\frac{d\mathbf{N}_{sav}^T}{dx}\frac{d\mathbf{N}_{sav}}{dx}\right)dx$$

Razlika u odnosu na rešenje linearne teorije za matricu krutosti grednog KE

  - gde je S aksijalna sila u KE i unosi se sa pozitivnim znakom u slučaju zatezanja, odnosno sa negativnim znakom u slučaju pritiska

Bifurkaciona stabilnost. Matrica krutosti linijskog KE

- **Usvajaju se IF (rešenje teorije prvog reda)**

$$\mathbf{N}_{aks} = \left[1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L}\right] \qquad \mathbf{N}_{sav} = \left[1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right]$$

- Aproksimativno rešenje za matricu krutosti

$$\mathbf{k}_{aks} = \int_L \left(EA \frac{d\mathbf{N}_{aks}^T}{dx} \frac{d\mathbf{N}_{aks}}{dx}\right) dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_0 = \int_L \left(\frac{d^2\mathbf{N}_{sav}^T}{dx^2} EI_z \frac{d^2\mathbf{N}_{sav}}{dx^2}\right) dx = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_g = S \int_L \left(\frac{d\mathbf{N}_{sav}^T}{dx} \frac{d\mathbf{N}_{sav}}{dx}\right) dx = \frac{S}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

geometrijska matrica krutosti (konzistentna geometrijska matrica krutosti ili matrica inicijalnih napona)

$$\mathbf{k}_{xy} = \mathbf{k}_{0xy} + \mathbf{k}_{gxy}$$

Bifurkaciona stabilnost. Matrica krutosti linijskog KE

- **Aproksimativno rešenje za matricu krutosti pri aksijalnom naprezanju i savijanju u x – y ravni**

$$\mathbf{k}_{0xy} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 2 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 3 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 5 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 6 \end{bmatrix}_{6x6}$$

$$\mathbf{k}_{gxy} = \frac{S}{30L} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & -36 & 3L & 2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & -3L & -L^2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 36 & -3L & 5 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & -3L & 4L^2 & 6 \end{bmatrix}_{6x6}$$

$$\mathbf{k}_{xy} = \mathbf{k}_{oxy} + \mathbf{k}_{gxy}$$

$$\mathbf{R} = \left(\mathbf{k}_{oxy} + \mathbf{k}_{gxy}\right)\mathbf{d}$$

Bifurkaciona stabilnost. Sistem linijskih KE

- **Ukupna potencijalna energija diskretnog sistema može da se prikaže u obliku**

$$\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{d}^{*T}\left(\mathbf{K}_o^* + \mathbf{K}_g^*\right)\mathbf{d}^* - \mathbf{d}^{*T}\mathbf{Q}^*$$

- **Jednačine sistema KE** (jednačine ravnoteže u čvorovima mreže konačnih elemenata) određuju se primenom principa o minimumu ukupne potencijalne energije

$$\delta\Pi = 0 \Rightarrow \left(\mathbf{K}_o^* + \mathbf{K}_g^*\right)\mathbf{d}^* = \mathbf{Q}^*$$

- **Stanje bifurkacione ravnoteže, odnosno indiferentno ili neutralno stanje ravnoteže, nastaje kada je druga varijacija ukupne potencijalne energije jednaka nuli, tj. varijacijom prethodnog izraza dobija se**

$$\delta^2\Pi = 0 \Rightarrow \left(\mathbf{K}_o^* + \mathbf{K}_g^*\right)\delta\mathbf{d}^* = 0$$

Bifurkaciona stabilnost. Sistem linijskih KE

- **Da bi prethodni homogen sistem imao netrivijalno rešenje ($\delta\mathbf{d}^* \neq \mathbf{0}$) mora biti zadovoljen uslov**

$$\det\left(\mathbf{K}_o^* + \mathbf{K}_g^*\right) = 0$$

- U analizi bifurkacione stabilnosti relativni odnos između aksijalnih sila u KE sistema je poznat i nezavisan od intenziteta spoljašnjih dejstava. Geometrijska matrica krutosti zavisi od aksijalnih sila u KE koje mogu da se odrede prema linearnoj teoriji za proizvoljan intenzitet spoljašnjeg dejstva. S obzirom na to da se intenzitet aksijalnih sila proporcionalno menja sa intenzitetom spoljašnjeg dejstva, i ako se faktor proporcionanosti obeleži sa λ, prethodna jednačina postaje

$$\det\left(\mathbf{K}_o^* + \lambda\mathbf{K}_g^*\right) = 0$$

Bifurkaciona stabilnost. Sistem linijskih KE

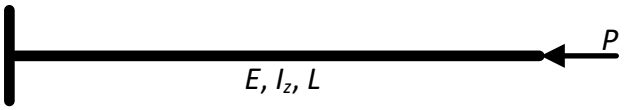
- Prethodni izraz predstavlja karakterističnu jednačinu kojom je definisan problem bifurkacione stabilnosti sistema KE u obliku algebarskog svojstvenog problema koji ima n svojstvenih vrednosti λ_i, i = 1, 2, ..., n, gde je n broj stepeni slobode sistema. Rešavanjem svojstvenog problema određuje se najmanja apsolutna vrednost faktora proporcionalnosti λ (najmanja svojstvena vrednost, tj. najmanji koren karakterističnog polinoma) koji odgovara kritičnom opterećenju. Inicijalno opterećenje, na osnovu kaga su određene aksijalne sile u KE, množi se najmanjom vrednosti faktora proporcionalnosti $\lambda = \lambda_{min}$ i na taj način određuje se intenzitet kritičnog opterećenja, tj. određuje se najmanji intenzitet spoljašnjeg dejstva pri kome sistem gubi stabilnost. Faktoru proporcionalnosti λ_{min} odgovara svojstveni vektor $\mathbf{d}^*$, tj. kritični svojstveni vektor (forma izvijanja), koji se određuje iz sistema jednačina

$$\left(\mathbf{K}_o^* + \lambda_{min}\mathbf{K}_g^*\right)\mathbf{d}^* = 0$$

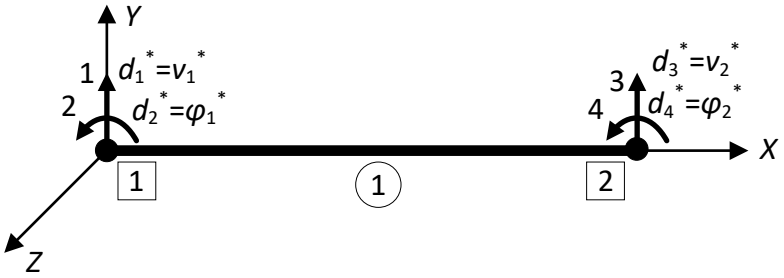
Bifurkaciona stabilnost. Linijski KE

- **Primer 1. Konzolni nosač**

Matematički model konzolnog nosača



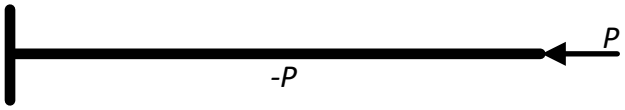
Numerički model
Globalni koordinatni sistem i stepeni slobode



$$\mathbf{k}_o^1 = \mathbf{k}_o^{1*} = \frac{EI_z}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

LKS i GKS su paralelni pa je matrica transformacije jedinična

Raspodela aksijalnih sila, određena primenom linearne teorije



$$\mathbf{k}_g^1 = \mathbf{k}_g^{1*} = \frac{-P}{30L}\begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Bifurkaciona stabilnost. Linijski KE

- **Primer 1. Konzolni nosač**

Vodeći računa o graničnim uslovima $d_1^* = d_2^* = 0$ jednačina bifurkacione stabilnosti glasi

$$\left| \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 3 & 4 & \\ 12 & -6L & 3 \\ -6L & 4L^2 & 4 \end{bmatrix} - \frac{P}{30L} \begin{bmatrix} 3 & 4 & \\ 36 & -3L & 3 \\ -3L & 4L^2 & 4 \end{bmatrix} \right| = 0$$

Rešavanjem prethodnog sistema jednačina po nepoznatom P dobija se

$$P_1 = 0{,}25188 \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \qquad P_2 = 3{,}26059 \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}$$

Kritično opterećenje je manja vrednost od prethodne dve

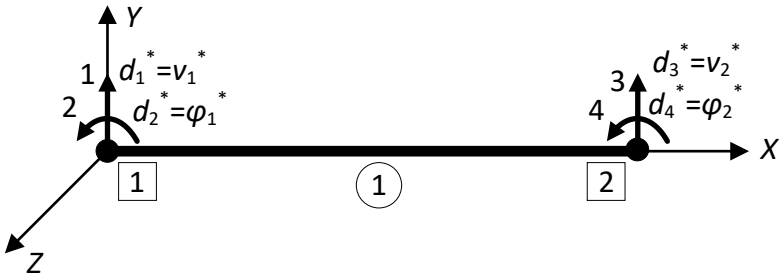
Ojlerova kritična sila glasi $P_{kr}^E = 0{,}25000 \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}$

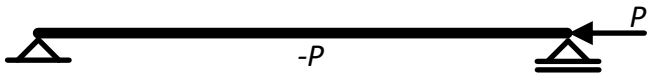
Poređenjem se zaključuje se da je približno rešenje veće za približno 0,8% u odnosu na Ojlerovo rešenje

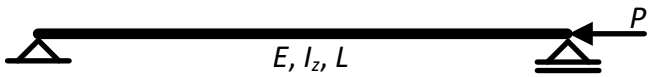
Povećanje tačnosti se postiže diskretizacijom konzole sa više KE

Bifurkaciona stabilnost. Linijski KE

- **Primer 2. Prosta greda**
  - Varijanta I







$$\mathbf{k}_o^1 = \mathbf{k}_o^{1*} = \frac{EI_z}{L^3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 12 & 6L & -12 & 6L & 1 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L & 3 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_g^1 = \mathbf{k}_g^{1*} = \frac{-P}{30L}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 36 & 3L & -36 & 3L & 1 \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 & 2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L & 3 \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left| \frac{EI_z}{L^3}\begin{bmatrix} 2 & 4 & \\ 4L^2 & 2L^2 & 2 \\ 2L^2 & 4L^2 & 4 \end{bmatrix} - \frac{P}{30L}\begin{bmatrix} 2 & 4 & \\ 4L^2 & -L^2 & 2 \\ -L^2 & 4L^2 & 4 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$P_1 = 1{,}21585\frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \qquad P_2 = 6{,}07927\frac{\pi^2 EI_z}{L^2}$$

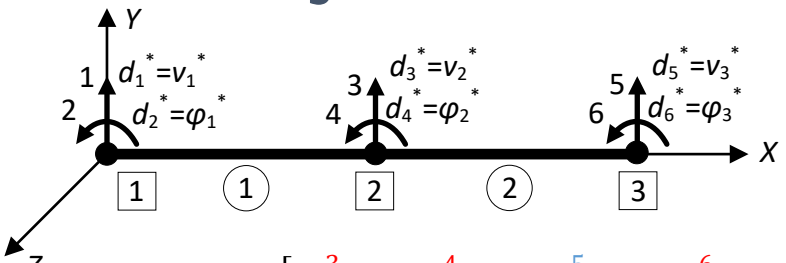
$$P_{kr}^E = 1{,}0\frac{\pi^2 EI_z}{L^2}$$

Poređenjem se zaključuje se da je približno rešenje veće za približno 21% u odnosu na Ojlerovo rešenje

Povećanje tačnosti se postiže diskretizacijom proste grede sa više KE

Bifurkaciona stabilnost. Linijski KE

- **Primer 2. Prosta greda**
  - Varijanta II



$$\mathbf{k}_o^1=\mathbf{k}_o^{1*}=\frac{EI_z}{(L/2)^3}\begin{bmatrix} 12 & 6(L/2) & -12 & 6(L/2) \\ 6(L/2) & 4(L/2)^2 & -6(L/2) & 2(L/2)^2 \\ -12 & -6(L/2) & 12 & -6(L/2) \\ 6(L/2) & 2(L/2)^2 & -6(L/2) & 4(L/2)^2 \end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_o^2=\mathbf{k}_o^{2*}=\frac{EI_z}{(L/2)^3}\begin{bmatrix} 12 & 6(L/2) & -12 & 6(L/2) \\ 6(L/2) & 4(L/2)^2 & -6(L/2) & 2(L/2)^2 \\ -12 & -6(L/2) & 12 & -6(L/2) \\ 6(L/2) & 2(L/2)^2 & -6(L/2) & 4(L/2)^2 \end{bmatrix}\begin{matrix}3\\4\\5\\6\end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_g^1=\mathbf{k}_g^{1*}=\frac{-P}{30(L/2)}\begin{bmatrix} 36 & 3(L/2) & -36 & 3(L/2) \\ 3(L/2) & 4(L/2)^2 & -3(L/2) & -(L/2)^2 \\ -36 & -3(L/2) & 36 & -3(L/2) \\ 3(L/2) & -(L/2)^2 & -3(L/2) & 4(L/2)^2 \end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_g^2=\mathbf{k}_g^{2*}=\frac{-P}{30(L/2)}\begin{bmatrix} 36 & 3(L/2) & -36 & 3(L/2) \\ 3(L/2) & 4(L/2)^2 & -3(L/2) & -(L/2)^2 \\ -36 & -3(L/2) & 36 & -3(L/2) \\ 3(L/2) & -(L/2)^2 & -3(L/2) & 4(L/2)^2 \end{bmatrix}\begin{matrix}3\\4\\5\\6\end{matrix}$$

$$\left|\frac{EI_z}{(L/2)^3}\begin{bmatrix} L^2 & -3L & \frac{L^2}{2} & 0 \\ -3L & 24 & 0 & 3L \\ \frac{L^2}{2} & 0 & 2L^2 & \frac{L^2}{2} \\ 0 & 3L & \frac{L^2}{2} & L^2 \end{bmatrix}\begin{matrix}2\\3\\4\\6\end{matrix}-\frac{P}{30(L/2)}\begin{bmatrix} L^2 & -\frac{3L}{2} & -\frac{L^2}{4} & 0 \\ -\frac{3L}{2} & 72 & 0 & \frac{3L}{2} \\ -\frac{L^2}{4} & 0 & 2L^2 & -\frac{L^2}{4} \\ 0 & \frac{3L}{2} & -\frac{L^2}{4} & L^2 \end{bmatrix}\begin{matrix}2\\3\\4\\6\end{matrix}\right|=0$$

$$P_1=4{,}86342\frac{\pi^2EI_z}{L^2}$$

$$P_2=24{,}31708\frac{\pi^2EI_z}{L^2}$$

$$P_3=1{,}00752\frac{\pi^2EI_z}{L^2} \qquad P_{kr}^E=1{,}0\frac{\pi^2EI_z}{L^2}$$

$$P_4=13{,}04235\frac{\pi^2EI_z}{L^2}$$

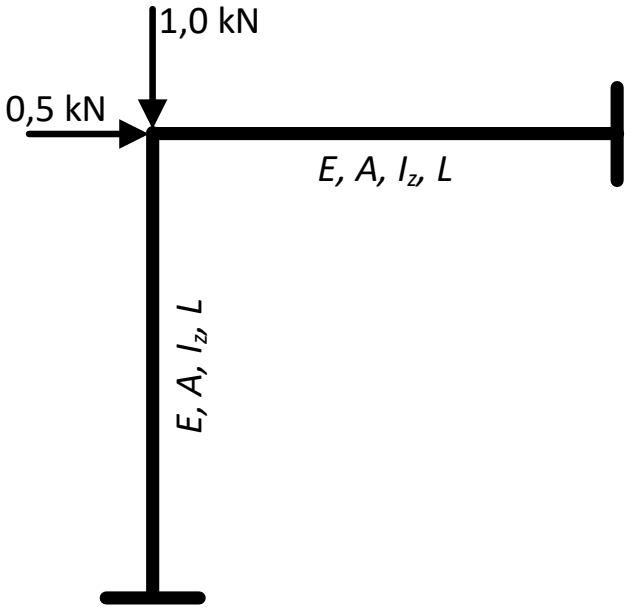
Poređenjem se zaključuje se da je približno rešenje veće za približno 0,8% u odnosu na Ojlerovo rešenje

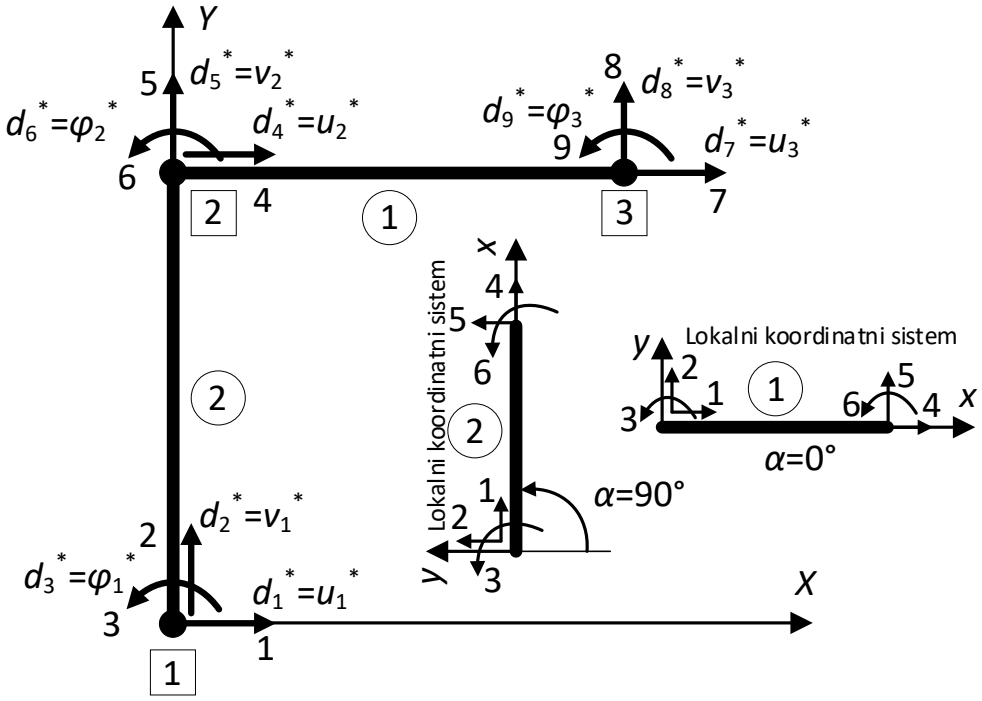
Diskretizacijom sa više KE postiže se brza konvergencija ka Ojlerovom rešenju

Diskretizacijom sa više KE postiže se brza konvergencija ka tačnom rešenju (u okviru tačnosti razmatrane teorije) sa gornje strane

Bifurkaciona stabilnost. Linijski KE

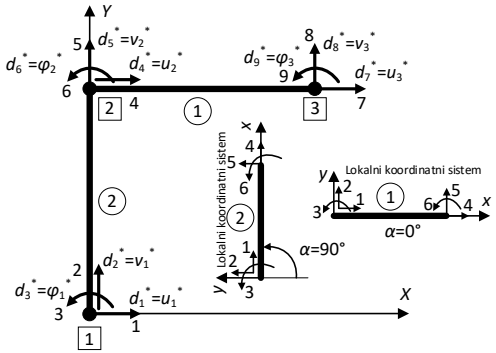
- **Primer 3. Ravanski okvir**
  - Podaci su: E = 210 GPa, L = 10,0 m i poprečni presek IPE100 (I_z=1,71x10^{-6}m^4 i A=1,03x10^{-3}m^2)





Bifurkaciona stabilnost. Linijski KE

- **Primer 3. Ravanski okvir**



$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

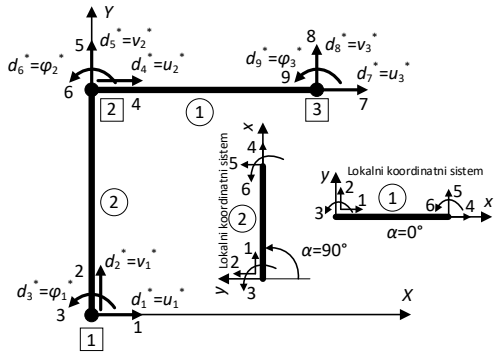
$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_1^* = \begin{array}{c|cccccc} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 4 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 5 & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 6 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ 7 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 9 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{array}$$

$$\mathbf{k}_2^* = \mathbf{T}_2^T \mathbf{k}_2 \mathbf{T}_2 = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 2 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 3 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{4EI_z}{L} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ 4 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 5 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 6 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{2EI_z}{L} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{array}$$

Bifurkaciona stabilnost. Linijski KE

- **Primer 3. Ravanski okvir**



$$\mathbf{P}^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}5 \\ -1{,}0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9}$$

$$\mathbf{K}^*_{aa}\mathbf{d}^*_a = \mathbf{S}^*_a = \mathbf{P}^*_a + \mathbf{Q}^*_a$$

$$\frac{EI_z}{L^3}\begin{bmatrix} 60245{,}9 & 0 & 60 \\ 0 & 60245{,}9 & 60 \\ 60 & 60 & 800 \end{bmatrix}_{4\,5\,6} \begin{Bmatrix} d_4^* \\ d_5^* \\ d_6^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}5 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}_{4\,5\,6}$$

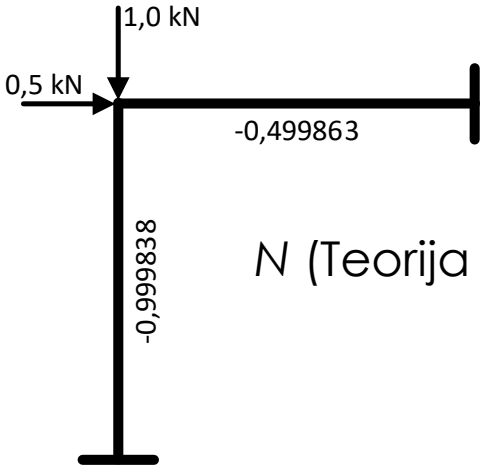
$$\begin{Bmatrix} d_4^* \\ d_5^* \\ d_6^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2^* \\ v_2^* \\ \varphi_2^* \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI_z}\begin{Bmatrix} 0{,}00829869746 \\ -0{,}01659925491 \\ 0{,}00062254181 \end{Bmatrix}_{4\,5\,6}$$

$$\mathbf{d}^{1^*} = \frac{1}{EI_z}\begin{Bmatrix} 0{,}00829869746 \\ -0{,}01659925491 \\ 0{,}00062254181 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{4\,5\,6\,7\,8\,9}, \qquad \mathbf{d}^1 = \frac{1}{EI_z}\begin{Bmatrix} 0{,}00829869746 \\ -0{,}01659925491 \\ 0{,}00062254181 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{d}^{2^*} = \frac{1}{EI_z}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}00829869746 \\ -0{,}01659925491 \\ 0{,}00062254181 \end{Bmatrix}_{1\,2\,3\,4\,5\,6}, \qquad \mathbf{d}^2 = \mathbf{T}_2\mathbf{d}^{2^*} = \frac{1}{EI_z}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}01659925491 \\ -0{,}00829869746 \\ 0{,}00062254181 \end{Bmatrix}$$

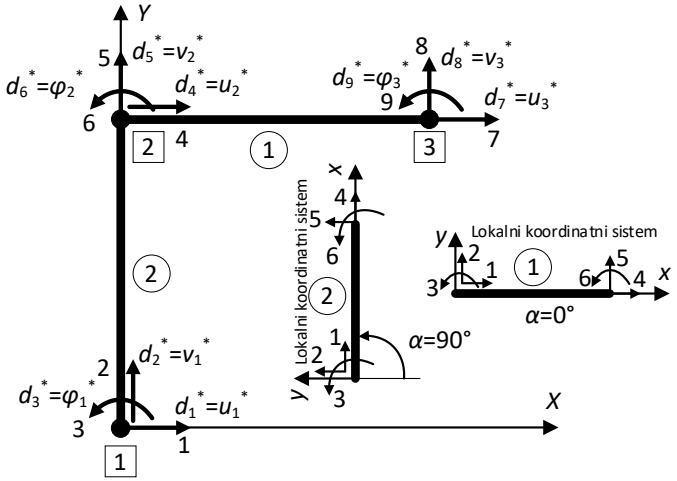
Bifurkaciona stabilnost. Linijski KE

- **Primer 3. Ravanski okvir**



$$\mathbf{R} = \mathbf{kd} - \mathbf{Q}$$

N (Teorija I reda)



$$\mathbf{k}_g^1 = \mathbf{k}_g^{1*} = \frac{-0,499863}{30L}$$

4	5	6	7	8	9	
0	0	0	0	0	0	4
0	36	3L	0	−36	3L	5
0	3L	$4L^2$	0	−3L	$-L^2$	6
0	0	0	0	0	0	7
0	−36	−3L	0	36	−3L	8
0	3L	$-L^2$	0	−3L	$4L^2$	9

$$\mathbf{k}_g^2 = \frac{-0,999838}{30L}$$

0	0	0	0	0	0
0	36	3L	0	−36	3L
0	3L	$4L^2$	0	−3L	$-L^2$
0	0	0	0	0	0
0	−36	−3L	0	36	−3L
0	3L	$-L^2$	0	−3L	$4L^2$

$$\mathbf{k}_g^{2*} = \mathbf{T}_2^T \mathbf{k}_g^2 \mathbf{T}_2 = \frac{-0,999838}{30L}$$

1	2	3	4	5	6	
36	0	−3L	−36	0	−3L	1
0	0	0	0	0	0	2
−3L	0	$4L^2$	3L	0	$-L^2$	3
−36	0	3L	36	0	3L	4
0	0	0	0	0	0	5
−3L	0	$-L^2$	3L	0	$4L^2$	6

Bifurkaciona stabilnost. Linijski KE

- **Primer 3. Ravanski okvir**

  Jednačina bifurkacione stabilnosti glasi

$$\left| \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} & 4 & 5 & 6 & \\ 4 & 60245{,}9 & 0 & 60 & 4 \\ 5 & 0 & 60245{,}9 & 60 & 5 \\ 6 & 60 & 60 & 800 & 6 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} & 4 & 5 & 6 & \\ 4 & -0{,}119981 & 0 & -0{,}0999838 & 4 \\ 5 & 0 & -0{,}0599836 & -0{,}0499863 & 5 \\ 6 & -0{,}0999838 & -0{,}0499863 & -1{,}9996 & 6 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$-0{,}0134914\lambda^3 + 7516{,}47\lambda^2 - 9{,}36879 \cdot 10^8 \lambda + 1{,}34439 \cdot 10^{11} = 0$$

$$\lambda_1 = 143{,}7 = \lambda_{min}, \quad \lambda_2 = 187962 \text{ i } \lambda_3 = 369023$$

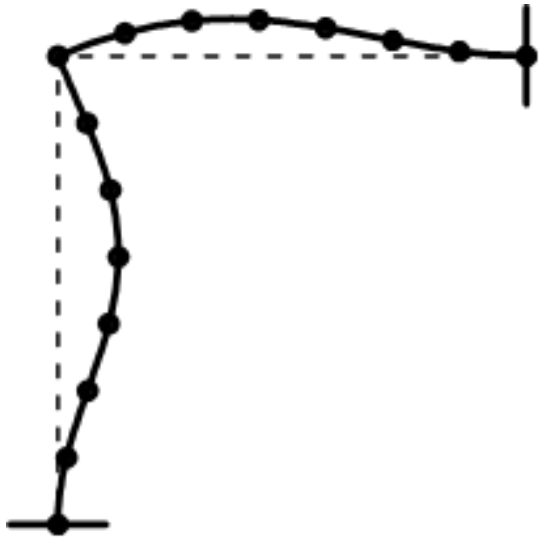
Najmanja vrednost od prethodne tri predstavlja faktor kritičnog opterećenja, odnosno kritično opterećenje određuje se množenjem intenziteta spoljašnjih dejstava faktorom λ_{min}

Približavanje tačnom rešenju za faktor kritičnog opterećenja λ_{min} postiže se diskretizacijom stuba i grede sa većim brojem KE

Bifurkaciona stabilnost. Linijski KE

- **Primer 3. Ravanski okvir**
  - Podelom stuba i grede na veći broj KE postiže se brza konvergencija ka tačnom rešenju (u okviru tačnosti razmatrane teorije) sa *gornje* strane

Broj KE	λ_{min}
2 (1 KE po štapu)	143,7
4 (2 KE po štapu)	92,2
6 (3 KE po štapu)	90,7
8 (4 KE po štapu)	90,3
10 (5 KE po štapu)	90,2
12 (6 KE po štapu)	90,1
14 (7 KE po štapu)	90,1



Bifurkaciona stabilnost ploča

Bifurkaciona stabilnost ploča

- Komponente membranskih deformacija u srednjoj ravni ploče koje su rezultat velikih poprečnih pomeranja w = w(x,y), glase (nelinearni članovi veze deformacija i pomeranja)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}$$

- Po analogiji sa razmatranjima kod linijskog KE pojednostavljeni izraz za potencijalnu energiju deformacije savijanja ploče U_b glasi

$$U_b = \frac{1}{2}\int_A \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} dA + \frac{1}{2}\int_A \left[N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2N_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right] dA$$

- Raspodela poprečnih pomeranja $\mathbf{w}$, u polju KE, u zavisnosti od pomeranja u čvorovima može da se prikaže na sledeći način

$$\mathbf{w} = \mathbf{N}\mathbf{d}$$

Bifurkaciona stabilnost ploča

- Sada, sledi

$$\frac{1}{2}\int_A \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} dA = \frac{1}{2}\mathbf{d}^T \mathbf{k}_o \mathbf{d} \qquad \mathbf{k}_o = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} dA$$

$$\frac{1}{2}\int_A \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2N_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right] dA$$

$$\frac{1}{2}\int_A \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} dA = \frac{1}{2}\mathbf{d}^T \mathbf{k}_g \mathbf{d} \qquad \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \end{bmatrix} \mathbf{d} = \mathbf{G}_{\mathbf{2xn}}\mathbf{d}_{\mathbf{nx1}}$$

$$\mathbf{k}_g = \int_A \mathbf{G}^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \mathbf{G} dA$$

Bifurkaciona stabilnost ploča

- Geometrijske matrice krutosti (pravougaoni nekonformni **KE koji ima 12 stepeni slobode**)

$$\mathbf{k}_{gx} = \frac{N_x b}{630a} \cdot \begin{bmatrix} 276 & 66b & -42a & -276 & -66b & -42a & -102 & 39b & -21a & 102 & -39b & -21a \\ & 24b^2 & 0 & -66b & -24b^2 & 0 & -39b & 18b^2 & 0 & 39b & -18b^2 & 0 \\ & & 112a^2 & 42a & 0 & -28a^2 & 21a & 0 & -14a^2 & -21a & 0 & 56a^2 \\ & & & 276 & 66b & 42a & 102 & -39b & 21a & -102 & 39b & 21a \\ & & & & 24b^2 & 0 & 39b & -18b^2 & 0 & -39b & 18b^2 & 0 \\ & & & & & 112a^2 & 21a & 0 & 56a^2 & -21a & 0 & -14a^2 \\ & & & & & & 276 & -66b & 42a & -276 & 66b & 42a \\ & & & & & & & 24b^2 & 0 & 66b & -24b^2 & 0 \\ & & & & & & & & 112a^2 & -42a & 0 & -28a^2 \\ & & \text{sim.} & & & & & & & 276 & -66b & -42a \\ & & & & & & & & & & 24b^2 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 112a^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{gy} = \frac{N_y a}{630b} \cdot \begin{bmatrix} 276 & 42b & -66a & 102 & 21b & 39a & -102 & 21b & -39a & -276 & 42b & 66a \\ & 112b^2 & 0 & 21b & 56b^2 & 0 & -21b & -14b^2 & 0 & -42b & -28b^2 & 0 \\ & & 24a^2 & -39a & 0 & -18a^2 & 39a & 0 & 18a^2 & 66a & 0 & -24a^2 \\ & & & 276 & 42b & 66a & -276 & 42b & -66a & -102 & 21b & 39a \\ & & & & 112b^2 & 0 & -42b & -28b^2 & 0 & -21b & -14b^2 & 0 \\ & & & & & 24a^2 & -66a & 0 & -24a^2 & -39a & 0 & 18a^2 \\ & & & & & & 276 & -42b & 66a & 102 & -21b & -39a \\ & & & & & & & 112b^2 & 0 & -21b & 56b^2 & 0 \\ & & & & & & & & 24a^2 & 39a & 0 & -18a^2 \\ & & \text{sim.} & & & & & & & 276 & -42b & -66a \\ & & & & & & & & & & 112b^2 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 24a^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{gxy} = \frac{N_{xy}}{360} \cdot \begin{bmatrix} 180 & 0 & 0 & 0 & -72b & 0 & -180 & 72b & -72a & 0 & 0 & 72a \\ & 0 & -20ab & 72b & 0 & 20ab & -72b & 24b^2 & -20ab & 0 & 0 & 20ab \\ & & 0 & 0 & 20ab & 0 & 72a & -20ab & 24a^2 & -72a & 20ab & 0 \\ & & & -180 & 0 & 0 & 0 & 0 & 72a & 180 & -72b & -72a \\ & & & & 0 & -20ab & 0 & 0 & 20ab & 72b & -24b^2 & -20ab \\ & & & & & 0 & -72a & 20ab & 0 & 72a & -20ab & -24a^2 \\ & & & & & & 180 & 0 & 0 & 0 & 72b & 0 \\ & & & & & & & 0 & -20ab & -72b & 0 & 20ab \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 20ab & 0 \\ & & \text{sim.} & & & & & & & -180 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 & -20b \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Bifurkaciona stabilnost ploča

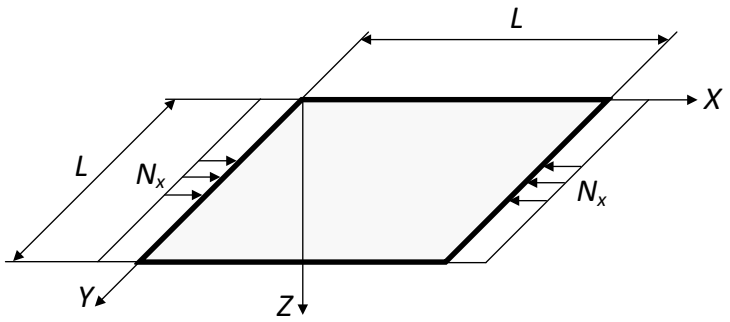
- **Jednačina bifurkacione stabilnosti glasi**

$$\det\left(\mathbf{K}_o^* + \lambda \mathbf{K}_g^*\right) = 0$$

- **Kritični svojstveni vektor (forma izbočavanja) određuje se iz izraza**

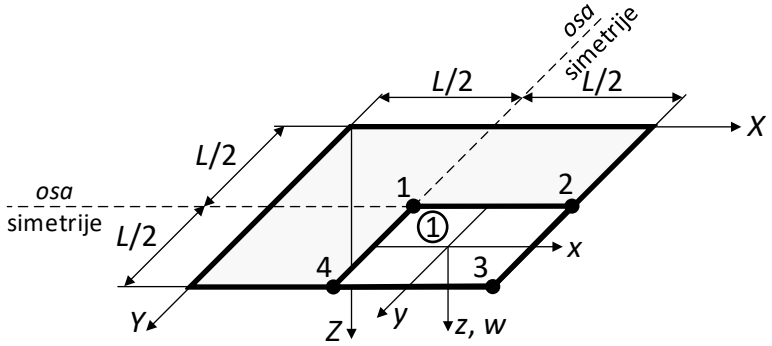
$$\left(\mathbf{K}_o^* + \lambda_{min} \mathbf{K}_g^*\right)\mathbf{d}^* = 0$$

- **Primer. KE sa 12 SS**
  - Analizira se stabilnost pritisnute tanke kvadratne ploče uklještene duž svih strana pri čemu linijsko oslanjanje obezbeđuje pomeranje u pravcu *X* ose
  - Podaci su: modul elastičnosti E, debljina h, dužina ivice L i Poasonov koeficijent 0,3



Bifurkaciona stabilnost ploča

- **Primer. KE sa 12 SS**



$$\mathbf{K}_o^* = k_{1,1}^{(1)*} = k_{1,1}^{(1)} = 42{,}24\frac{K}{L^2} \qquad N_y = N_{xy} = N_{yx} = 0$$

$$\mathbf{K}_g^* = k_{g\ 1,1}^{(1)*} = k_{g\ 1,1}^{(1)} = -\frac{276}{630}N_x$$

$$\det\left(\mathbf{K}_o^* + \lambda\mathbf{K}_g^*\right) = 0 \qquad 42{,}24\frac{K}{L^2} - \frac{276}{630}N_x = 0$$

$$N_{\text{x,kritično (MKE)}} = 9{,}77\frac{K\pi^2}{L^2}$$

$$N_{\text{x,kritično (analitičko)}} = 10{,}07\frac{K\pi^2}{L^2}$$

Konvergencija ka analitičkom rešenju postiže se povećanjem broja konačnih elemenata (progušćenje mreže) i/ili primenom elemenata višeg reda